

4. D L A の成長確率の multifractal 構造

中大・理工	松 下	貢
東北大・通研	早 川	美 徳
静大・教養	佐 藤	信 一
名大・工	本 田	勝 也

§ 1. はじめに

成長パターンは通常、フラクタル次元 d_f だけで特徴づけられることが多い。しかしながら例えば $d=3$ で、static なパターンの典型例である percolation cluster も、成長パターンの典型例である DLA パターンもともに $d_f \cong 2.5$ である。この例からも判るように一般に d_f だけではパターンの成長性を十分に特徴づけられないことは明らかである。そこで成長パターン特有の性質の 1 つに注目する。

成長パターンはその界面に成長確率なる measure を持つ。パターンが自己相似の時にはこの確率は一様ではあり得ない(一様の時には Eden モデルのようにパターンは compact で、 $d_f=d$ となる)。以下ではこのような一様ではない確率の空間分布を、multifractal の立場から、DLA を例にとって理論的に考察する。⁽¹⁾

§ 2. 成長パターンの情報次元

成長パターンでは一般化次元 D_q のうち、成長にほとんど無関係な $D_q (q < 0)$ は問題にする必要はない。 D_0 は成長確率のサポート、即ちパターンの界面のフラクタル次元であって、DLA ではパターンそのもののフラクタル次元と一致する。従って以下では $D_q (q \geq 1)$ のみを問題とする。

先ず情報次元 D_1 を考える。 D_1 の現象論的な定義は次の様である。⁽²⁾ 今、 d 次元空間において d_f なるフラクタル次元を持つフラクタルパターン(その回転半径: R_g)があるとす。遠方から probe 粒子として random-walker (その軌跡のフラクタル次元: d_w) を放ち、そのパターンに到達する様子を調べると、パターン自体による遮蔽効果のためにパターンのほんの少数の表面点 N_u にのみ random-walker が到達し得ることがわかる。この N_u は

$$N_u \sim R_g^{D_1} \quad (1)$$

とスケールされるのである。2次元 ($d=2$) ではブラウン粒子 ($d_w=2$) を probe 粒子とすると d_f に無関係に $D_1=1$ であることが数学的に厳密に証明されている。⁽³⁾

この D_1 には我々がこれまで展開して来た ordinary, extended, generalized DLA の理論^(4,5) が直接適用でき, その結果は

$$D_1 = d_f - 1 + \frac{d - d_f}{D_w - 1} \quad (2)$$

と求められる。これはブラウン粒子 ($d_w=2$) を probe 粒子とすると非常に簡単な表式

$$D_1 = d - 1 \quad (3)$$

となってパターンフラクタル次元 d_f に無関係であり, $d=2$ で正しい値を与えるだけでなく, $d=2, 3$ でDLAパターンについてなされたシミュレーションの結果⁽⁶⁾ (それぞれ $D_1 \cong 1, 2$) ともよく一致する。

一般化DLA (η -モデル) の成長規則を適用した時のパターン表面での成長確率の分布に関する情報次元 $D_{1\eta}$ も全く同様にしてもとめられ

$$D_{1\eta} = d_f - 1 + \frac{d - d_f}{\eta(d_w - 1)} \quad (4)$$

となる。特にパターンそのものも一般化DLAのその場合には

$$d_f = \frac{d_2 + \eta(d_w - 1)}{d + \eta(d_w - 1)} \quad (5)$$

なので⁽⁵⁾

$$D_{1\eta} = \frac{(d+1)(d-1)}{d + \eta(d_w - 1)} \quad (6)$$

となる。 $d=2$, $d_w=2$ の場合の $D_{1\eta}$ の η -依存性 (実線) と 2, 3 のシミュレーションの結果 (丸印) を図1に示す。理論とシミュレーションとの一致は良い。ここで特筆すべきは Eden モデル ($\eta \rightarrow 0$) のパターンと ballistic 粒子 ($d_w=1$) による凝集パターンと

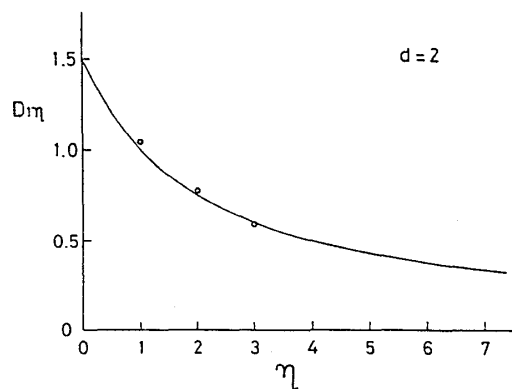


図1

はバルクのフラクタル次元(式(5))だけでなく、表面まで同じ次元(式(6))を持ち、同じ universality class に属することがわかる点であり、これはシミュレーションでも示されつつある。

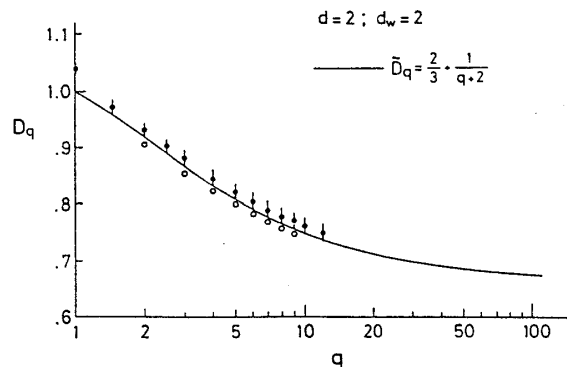
§ 3. D L A の一般化次元 D_q

ここで一般化次元 D_q の元々の定義式にもどると通常の D L A の場合の D_q と一般化 D L A の情報次元 $D_{1\eta}$ の定義式との顕著な類似性に気付く。そこでその類似性に着目して、一般化 D L A の $D_{1\eta}$ の現象論的な表式(4)の η に対応する通常の D L A の q の値を決定してその D_q をもとめるとその近似式として

$$D_q = d_f - 1 + \frac{d - d_f}{\eta^*(q)(d_w - 1)}, \tag{7}$$

$$\eta^*(q) = q - \frac{(d_f - 1)(q - 1)}{D_1} \tag{8}$$

が得られる。ここで D_1 は(2)に与えられている。図 2 に $d = 2$, $d_w = 2$, $d_f = 5/3$ (通常の D L A パターン) に対する理論式(実線)と、独立に全く別の方法でなされたシミュレーションの結果(黒丸⁽⁷⁾, 白丸⁽⁸⁾)を示す。両者の一致は非常に良い。



§ 4. おわりに

情報次元 D_1 に対する現象論的な表式(2)はこれまでに提案された式、例えば Coniglio-Stanley の式⁽⁹⁾に代るべきものと思われる。何故ならこれまでの式は $d = 2$, $d_w = 2$ で $D_1 = 1$ (厳密)を与えないし、 $d = 2, 3$ でのシミュレーションの結果とも明らかに矛盾するからである。D L A の一般化次元の表式(7), (8)はシミュレーションとの一致が非常に良いと言っても現象論から導かれた近似式である。従ってより本質論的な基礎付けが望まれよう。さらに言うまでもなく、以上に関連したシミュレーションがまだ数多く残されているし、各種の実験によって D_q を求めることも大変興味深い。

References

- 1) M. Matsushita, Y. Hayakawa, S. Sato and K. Honda: Phys. Rev. Lett. (6 July 1987).
- 2) P. Grassberger (unpublished).
- 3) N. G. Makarov: Proc. London Math. Soc. **51** (1985) 369.
- 4) K. Honda, H. Toyoki and M. Matsushita: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 707.
- 5) M. Matsushita, K. Honda, H. Toyoki, Y. Hayakawa and H. Kondo: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 2618.
- 6) P. Meakin and T. A. Witten: Phys. Rev. A **28** (1983) 2985.
- 7) Y. Hayakawa, S. Sato and M. Matsushita: Phys. Rev. A (July 1987).
- 8) P. Meakin, A. Coniglio, H. E. Stanley and T. A. Witten: Phys. Rev. A **34** (1986) 3325.
- 9) A. Coniglio and H. E. Stanley: Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1068.

5. 可逆的DLAクラスタのフラクタル次元

名大・工 本田 勝也
山梨大・教育 豊木 博泰
中央工・理工 松下 貢

ランダムなフラクタルパターンを形成するDLAに関する多くの研究が行なわれているが、ここでは可逆的なプロセスで再構築されるDLA (BJモデル⁽¹⁾) を議論する。このモデルは平衡系における“臨界状態”を実現するため平衡状態と非平衡状態の橋渡しをする興味深い統計力学の対象となる。

BJモデルは次のようなものである。⁽¹⁾ 任意のループのないクラスターを用意し、唯一のボンドでクラスターの他の部分と連結している先端粒子の1個をランダムに選び、ボンドを切断し再びクラスターに付着するまでランダムウォークさせる。もし遠方に飛び去ってしまった場合には、任意の遠方点から放出した別の粒子をランダムウォークを経て付着させクラスターの粒子数を保存する。このようなプロセスを繰り返すと、初期のクラスターがどのような形状であれ一定の回転半径 R_g をもつ定常状態に漸近していく。

我々は先に定常状態におけるクラスターのフラクタル次元 d_f を解析的に求めた。⁽²⁾ その結果は