物性研究 49－2（1987－11）

振動子集団の協力現象

京大・理　坂　口　英　継

（1987年8月31日受理）

はじめに

リミットサイクル振動子には引き込みとよばれる特有な現象があります。ここではリミットサイクル振動子集団の示す，引き込みに関連した協力現象を調べます。主に計算機シミュレーションの結果を図を使って説明します。確定的な結論が得られている例は多くありませんが，この系の示す独特なふるまいにいくらか興味をもっていただければと思います。

なお，この文章は学位論文としてまとめたものをもとにしています。これまで研究指導してくださった蔵本由紀教授・篠本滋博士に感謝します。

目　次

§1　リミットサイクルと引き込み
　1－1　序
　1－2　振動子集団の相互引き込みの例
§2　リミットサイクルの位相による表現
　2－1　振動の位相表示
　2－2　Stuart-Landau 方程式の位相表示
　2－3　2コの振動子の相互引き込み
§3　平均場結合モデル
　3－1　モデルとセルフコンシステント方程式による解析
　3－2　計算機シミュレーション
§4　1次元oscillator lattice
　4－1　1次元振動子系における引き込み
　4－2　ランダム系
§5　2次元・3次元 oscillator lattice と相転移
　5－1　相転移と次元

5－2　シミュレーション

§6　2次元・3次元 oscillator latticeとパターン形成

6－1　標的パターンと渦巻きパターン

6－2　渦巻きパターンと引き込みの多安定性

§1　リミットサイクルと引き込み

1－1　序

さまざまな現象の中に，周期運動が見られる。地球の自転・公転に始まり，振り子の運動，笛やバイオリンなどの楽器の振動，さらに心臓の拍動や呼吸など，実に多種多様な周期運動が存在する。そのメカニズムや周期や波形は個々の系によって異なるが，周期運動を大きく2つのグループに分けることができる。1つはハミルトン力学系で表わされるタイプで，振動の振幅，周期は初期条件によって決まる。系のエネルギーは常に一定である。上にあげた例では，地球の公転・自転，振り子の振動などがこれにあたる。もう一方はリミットサイクル振動と呼ばれるタイプで，振動の振幅，周期は初期条件によらず十分時間がたつと一定の値におちつく。最初わずかでも振動のタネがあると，それが発達して一定の大振幅の振動が生じる。そのため自励振動とも呼ばれる。振動の増幅ということからわかるように，この振動には外からのエネルギーや物質の流入が必要である。一方振幅が一定におちつくことから，その流入したエネルギーや物質を散逸するメカニズムももっていることがわかる。バイオリンの弦の振動の例でいえば，弦を弓で引く際の運動エネルギーが，弦と弓の間の摩擦力を介して振動のエネルギーになる。それが音や熱のエネルギーとして外へ散逸される。このようにリミットサイクル振動はエネルギーや物質の流入と散逸のバランスの上に立つシステム，即ち非平衡開放系に生じるリズム運動である。

ハミルトン力学系における振動とリミットサイクル振動のもう1つのちがいはその安定性である。振り子を真空中で振らせると，いつまでも周期運動を続けるが，空気中では無数の気体分子と衝突しあう結果，巨視的にはまさつ力が働き，十分時間がたつと静止する。気体分子との弱い相互作用のために，その力学的性質が定性的に変わってしまうという意味において，この系は不安定といえる。リミットサイクル振動は，もともとエネルギーの流入，散逸のバランスの結果生じる運動なので，少しくらい他の系と相互作用を行なっても，そのバランスが少しずれてわずかに振幅や周期が変わる程度で，定性的な変化はない。この種の安定性は構造安定性と呼ばれる。

リミットサイクル振動に特徴的な性質として，引き込み現象がある。引き込み現象というの

は，リミットサイクル振動子が，その振動の周期に近い周期をもつ外力を受けることにより，その周期が外力の周期と一致するようになる現象である。その結果，リミットサイクル振動子は外力と歩調をそろえて振動する。人間も含めて多くの生物には，サーカディアンリズムと呼ばれるほぼ1日を周期とする自律的なリズムがある。睡眠・覚醒サイクルというはっきりしたリズムに加えて，体温その他の生理機能もほぼ1日を周期として振動している。ほら穴の中や調節された実験室といった時刻を知る手がかりのまったくない場所で生活しても，睡眠・覚醒サイクルや体温のリズムは消えない。その周期は人によって違うが，多くの人の場合24時間以上である。昼夜の日照変化などの自然環境や社会環境は1日24時間を周期として変化しており，ふつうの人はその周期的環境の中で生活している。この周期的環境のもとでは，睡眠・覚醒サイクルや体温のリズムの周期は24時間となっている。睡眠時刻は人によって，また日によって異なるが，睡眠時刻が毎日1時間ずつおそくなっていく人はあまりいないだろう。サーカディアンリズムをリミットサイクル振動とみなす立場では，その振動が24時間を周期とする外力に引き込まれたということができる。

引き込み現象には上にのべた外力に引き込まれる「強制引き込み」のほかに，複数の振動数の異なるリミットサイクル振動子が相互作用をおよぼしあう結果，振動数がそろう「相互引き込み」と呼ばれる現象がある。進み方の少し違う時計をうすい木の板に少しはなして掛けておくと，時計は同調して進むようになる。これは古くHuygensによって発見された相互引き込みの例である。引き込みにはこれまで述べてきた振動数が一致する「調和引き込み」(harmonic entrainment)の他に振動数の比が1対nで固定されるsuper harmonic entrainmentや1対1/nで固定されるsubharmonic entrainment，さらにはm対nの振動数の比で生じる引き込みなどさまざまな場合がある。(ここでmとnは自然数である。)

リミットサイクル振動の振幅は外乱に対して安定であるが，その位相は中立安定である。何らかの外乱で振動の位相が進んだり遅れたりしても，そのずれは減衰もしないし発達もしない。位相がずれた状態で再び規則正しい振動を続ける。リミットサイクル振動の振動数と全く等しい振動数の周期外力を受けると外力に対して一定の位相が決まって外力に同調して振動するようになる。こうなると何らかの外乱で位相がずれても，そのずれは減衰する。周期外力を受けることによって位相が安定化したといえる。外力の振動数が少し変わっても，位相方向の構造安定性のため，振動数の差がわずかなら，外力に対して一定の位相を保って振動するという性質はかわらない。この状態はリミットサイクル振動子が外力に引き込まれている状態である。このように位相方向の運動の中立安定性が引き込みと深く関わっているわけである。振動数の差が大きくなりすぎると，一定の位相のずれを保てなくなり，引き込みは破綻する。この時振動

子は外力の振動数と振動子自身のつくる振動数の２つの振動数成分からなる準周期運動を示す。

１－２　振動子集団の相互引き込みの例

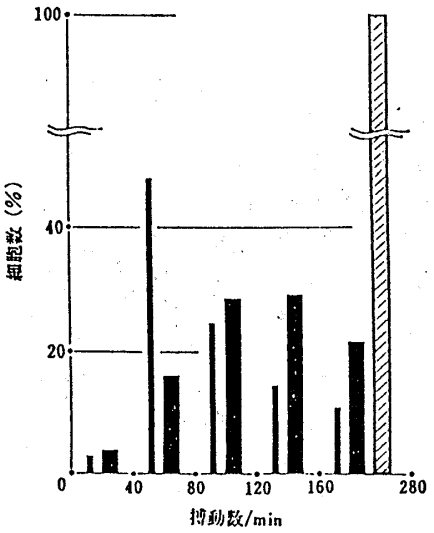
２つのリミットサイクル振動子が相互作用しあうと，相互引き込みが起こる。多数のリミットサイクル振動子の集団が協力しあうとどのような現象が生じるだろうか？　リミットサイクル振動子集団の協力現象，これが以下のテーマである。強磁性は小さな磁気モーメントをもつスピンが多数集まり相互作用しあう結果，マクロな規模で生じる秩序である。自然振動数の異なるリミットサイクル振動子の集団にも同様な意味でのマクロな秩序が生じるであろうか。２章以下ではモデル方程式をつかって，振動子集団の協力現象を調べる。最後までモデルの解析で現実と直接結びつかないので，ここでリミットサイクル集団の協力現象とみなせる現実の系での実験や観察をいくつか紹介する。

1）心筋細胞の引き込み現象

生きている動物の心臓を構成する細胞は，同期して拍動している。その結果１個の細胞では生じえない大きな拍動が可能になる。ニワトリやマウスの胚（胎児）から心臓をとり出し，酵素で１個１個の細胞にばらばらに分解する。それを適当な条件で培養すると，単一の心筋細胞がガラス皿の上で自律的に拍動を続ける。その拍動数は細胞ごとに異なっている。ところが24時間も培養すると，多くの心筋細胞の拍動数はそろってくる。培養された細胞は培養皿の上を動きまわり，２つの細胞が互いに接触すると，細胞間に電気的な接続ができ互いに同期して拍動するようになるのである。そのときの拍動数は２つの細胞のうちはやいほうのリズムにそろう傾向がある。６日も培養すると，心筋細胞とその間をうめている非心筋細胞がぎっしり集まったシートがつくられ，ほとんどすべての心筋細胞が同期して拍動するようになる。その拍動数はもとの拍動数の最も高いほうの値になっている。（図1.1）

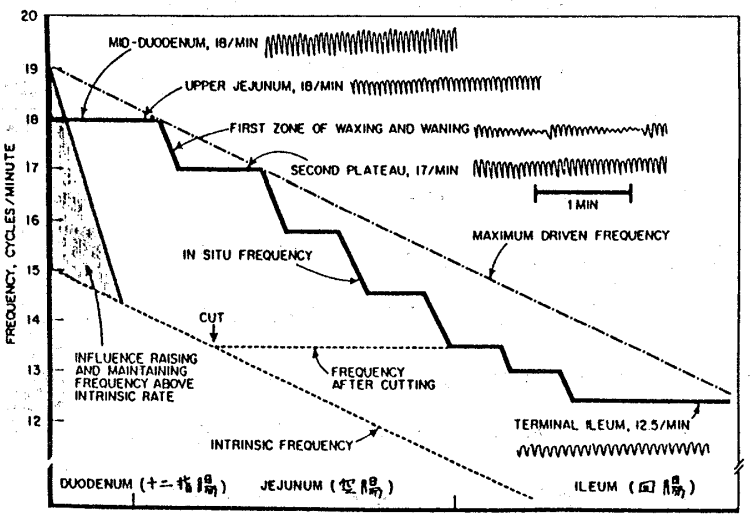
2）小腸の細胞の相互引き込み

小腸は平滑筋で囲まれた長い管で，消化物の吸収・輸送を行なっている。その筋肉には自発的なリズムがあり，一部を切り離して体からとり出しても規則正しく収縮を続ける。とり出した時示すリズムの振動数（自然振動数）は，胃に一番近い所で最も高く（～20回/分）回腸へ向かうにつれ単調に減少し，回腸で最も低く（～10回/分）なっている。実験では電気的リズムを測っているが，この電気的リズムが筋肉収縮という機械的振動をひきおこす。小腸の中では筋肉の各部分は近くの筋肉のリズムの影響をうけ，自然振動数とは異なる振動数で振動している。図1.2に示されているように小腸は長くて前端と後端では約２倍も自然振動数が異なるので，全体が同期して振動することができず，いくつかのドメインに分かれ，そのドメイン内では互いに同期して振動している。局所的に相互引き込みが生じている状態といえる。下流に向かう



心筋細胞の拍動数の分布を，培養3日目（幅の狭い棒），細胞の接触のある時期（幅の広い棒），および細胞シートのつくられた6日目(斜線のある棒)について示す．培養6日目で細胞がシートになると拍動の同調性が高くなることを示す．(五島喜与太，1974より)

図1.1　心筋細胞（文献7）



Frequency of the basic electrical rhythm of the small intestine of the anesthetized cat. The stepwise heavy line shows the observed frequency, 18 per min in the duodenum and upper jejunum and descending to 12.5 per min in the terminal ileum. Segments of the electric record from which the frequency was measured are shown. The upper slanting dashed line shows 1/refractory period. The lower slanting dotted line shows the intrinsic frequency displayed by short, isolated segments of the intestine. If the intestine is transected at the point labeled CUT, the frequency distal to the cut falls to that of the intrinsic frequency at the point of transection. [From Davenport, H. W.: PHYSIOLOGY OF THE DIGESTIVE TRACT, 4th edition, 1977, Year Book Medical Publishers, Inc., Chicago. Used by permission. (Adapted from Diamant and Bortoff, 1969. Electric records supplied by A. Bortoff.)]

図1.2　小腸（文献1）

につれ，振動数は低くなっている。ドメイン間には上流のドメインと下流のドメインの両方の振動の影響をうけうなりをおこしている領域が介在している。小腸中での振動数はどの部分でも自然振動数より高くなっている。

自然振動数の単調減少は，互いに引き込みあったドメイン内では位相の単調減少を引きおこす。その結果筋肉は波動状に収縮するだろう。小腸の消化物の輸送というはたらきとこのことは関係しているものと思われる。

3）ホタルの発光とホタルマシーン

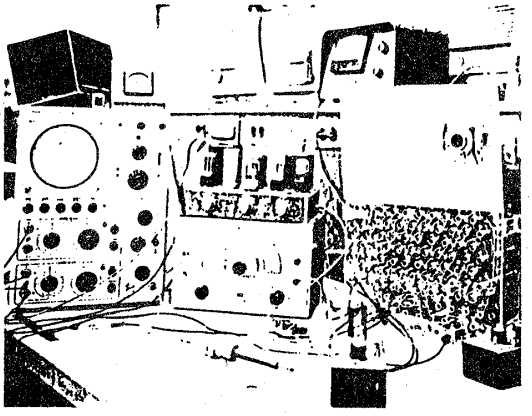
東南アジアのマングローブと呼ばれる樹林にはクリスマスツリーのライトのようにホタルが集まる。オスボタルは光を点滅させメスを誘引する。この光のリズムが相互に引き込んで，林全体で点滅する光のリズムが出現する。集合したタイボタルの場合，ほぼ500ミリ秒ごとに同時に点滅し，その点滅相が20ミリ秒以上ずれるものは1匹もいなかったと報告されている。（Buck and Buck）

生き物のホタルをまねて，ネオンランプ発振器を多数用意し，電気的に結合させることにより，ランプが同期して点滅する機械をつくることができる。（Winfree 図1.3）各振動子の振動数は少しずつ違うので，結合させない時は，個々のランプはばらばらに点滅する。コンデンサーを介して全振動子を同等の強さで結合させる。結合が強くなると相互引き込みが起こり，いっせいに点滅するようになる。さらに結合を強くすると，突然振動子が2つのグループに分離

し，各グループ内で同期して点滅する現象が生じる。ランプ全体を見ると１周期の間に２回光るようになる。

4） Belousov-Zhabotinsky反応

希硫酸中に$NaBrO_3$を加えガラス容器に入れ，マロン酸溶液を加える。さらにNaBr溶液と色素指示薬フェナントロリン鉄を加えた溶液をつくる。この溶液中では全体としては，マロン酸の臭素酸による酸化反応が進む。化学物質の量が適当な条件にあると，よくかきまぜた溶液中では，化学反応が時間的に振動する。鉄イオンはこの反応においては３価と４価の状態を往き来することによって，触媒の役割をしている。鉄イオンの価数の変化は色の変化（Fe^{3+}は青色）として肉眼で見ることができる。ペトリ皿の中に１㎜程度の深さまで反応物を注ぐ。この状況ではさまざまな２次元波動パターンがみられる。ランダムにペースメーカー核（不純物や容器の傷が自然に核になったり，外から紫外線を照射してつくる。）がばらまかれていると，核の部分の振動数が高くなり，周辺との間に位相差が生じる。それが波として周囲に広がり，同心円状パターンが形成される。ペースメーカー核がない場合でも，適当な初期攪乱によって渦巻きパターンが形成されることがある。（図1.4）無数のリミットサイクル振動子がシート状に分布し，それらが互いに拡散的に結合していると思えば，波動パターンも振動子集団の協力現象と見なすことができるだろう。



On the right, mounted in a plexiglas frame, the array of 71 neon oscillators, individually shielded in brass tubes. The silvered funnel on top swings down to expose a photodetector to the 71 flickering lights. The oscilloscope is painting a pattern like Figures 4 through 7. Equipment borrowed from the lab of Victor Bruce, Princeton, 1965.

図1.3　ホタルマシーン（文献１）

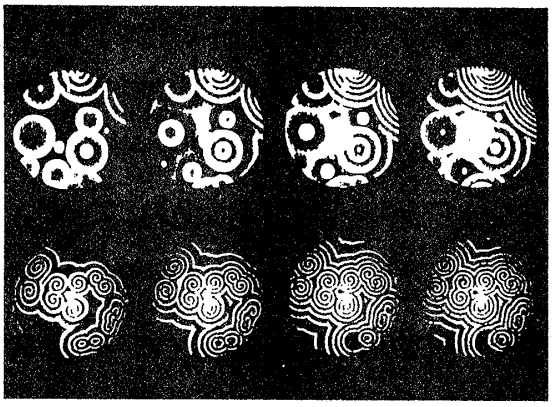


図1.4　B Z反応（文献１）

§２　リミットサイクルの位相による表現

２－１　振動の位相表示

リミットサイクル振動はその振幅や波形はかなり安定だが，位相方向の運動は中立安定である。そこで摂動をうけた時最も影響をこうむる位相方向の運動のみに着目して，引き込み等リミットサイクル振動のふるまいを表現する。[2)]

安定なリミットサイクルを解としてもつｓ変数の常微分方程式系を考える。

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \tag{2.1}$$

この方程式は周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ のリミットサイクル解 $\boldsymbol{X}_0(\omega t)$ をもつ。リミットサイクル軌道L上に位相 ϕ を $\boldsymbol{X}_0(\phi)=\boldsymbol{X}_0(\omega t)$ で定義する。つまり $\phi=0$ で表わされる点を適当に $\boldsymbol{X}_0(0)$ と決める。次に $\boldsymbol{X}_0(0)$ を初期値として，t 時間(2.1)式で時間発展させる。時刻 t にいる点 $\boldsymbol{X}_0(\omega t)$ を位相が ϕ の点と定義する。(図2.1)定義より

$$\frac{d\phi}{dt}=\omega \tag{2.2}$$

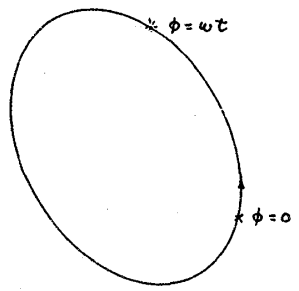


図 2.1　位相 ϕ の定義

$\boldsymbol{X}_0(\phi)=\boldsymbol{X}_0(\phi+\omega T)$ だから ϕ と $\phi+\omega T=\phi+2\pi$ はL上の同一点を表わす。振動子が外力や他の振動子から摂動を受けた時の位相 ϕ の従う方程式を求めたいわけだが，摂動を受けると運動は一般にLから少しずれる。そこで位相 ϕ の定義をLを含むある領域に拡張しておく。最も便利な定義は，摂動がない場合の(2.2)式がLを含む領域でもそのまま成立つようにスカラー場 $\phi(\boldsymbol{X})$ を決めることである。$\phi(\boldsymbol{X})$ は次の方程式を解くことによって決まる。

$$\frac{d\phi}{dt}=\mathrm{grad}_{\boldsymbol{X}}\phi\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\omega \tag{2.3}$$

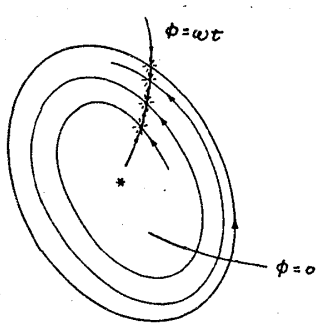


図 2.2　位相 ϕ の定義

s 次元空間内で位相 ϕ が一定の曲面のことを isochron と呼ぶ。[1] 無摂動の場合 $t=0$ に $\phi=0$ の isochron上にある点は $t=t$ には $\phi=\omega t$ の isochron 上にのっている。リミットサイクルの安定性より，軌道はLに近づく。(図 2.2) 振動数 $\omega'=\omega-\varepsilon\Delta$ の弱い周期外力を受けると、方程式は次のようになる。

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})+\varepsilon\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},\ t) \tag{2.4}$$

ただし，$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X},\ t+\frac{2\pi}{\omega'}\right)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},\ t)$

ϕ に対する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}&=\mathrm{grad}_{\boldsymbol{X}}\phi\cdot\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})+\varepsilon\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},\ t)\}\\&=\omega+\varepsilon\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{X}}\phi\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},\ t)\end{aligned} \tag{2.5}$$

リミットサイクルの安定性より，ε のオーダーの近似では $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}_0(\phi)$ でおきかえてもよい。

$$\frac{d\phi}{dt}=\omega+\varepsilon\boldsymbol{Z}(\phi)\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},\ t) \tag{2.6}$$

ただし $\boldsymbol{Z}(\phi)=(\mathrm{grad}_{\boldsymbol{X}}\phi)_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0(\phi)}$ (2.7)

外力に対する位相のずれ ψ を $\psi=\phi-\omega' t$ で定義する。(2.6)式より，

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\{\Delta+\boldsymbol{Z}(\omega' t+\psi)\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_0(\omega' t+\psi),t)\} \tag{2.8}$$

ψ は ε のオーダーでゆっくり変化するので，$T'=\dfrac{2\pi}{\omega'}$ の間にはほとんど変化がないと考えられる。ψ を一定として(2.8)式の右辺の時間平均をとってもよいだろう。

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\{\Delta+\Gamma(\psi)\} \tag{2.9}$$

$$\Gamma(\psi)=\Gamma(\psi+2\pi)=\frac{1}{T'}\int_0^{T'}\mathrm{d}t\,\boldsymbol{Z}(\omega' t+\psi)\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_0(\omega' t+\psi),t)$$

(2.9)式が安定な平衡点 ψ_{eq} をもつ場合，$\phi=\omega' t+\psi_{\mathrm{eq}}$ と表わせるので，リミットサイクルは周期外力に引き込まれている。自然振動数と周期外力の振動数の差 Δ が大きくなると，(2.9)式に安定な平衡解が存在しなくなり，引き込みが破れる。もとの位相変数を使って(2.9)を書き直すと，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\omega+\varepsilon\Gamma(\phi-\omega' t) \tag{2.10}$$

次にわずかに異なる振動子が2つ，互いに対称な形で弱く結合している系を考える。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_1)+\varepsilon\{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)+\delta\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}_1)\}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_2)+\varepsilon\{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_1)+\delta\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}_2)\}\end{cases} \tag{2.11}$$

強制振動の場合と同様な計算をくりかえすと，

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}=\omega+\varepsilon\{\boldsymbol{Z}(\phi_1)\cdot\boldsymbol{V}(\phi_1,\phi_2)+g_1(\phi_1)\}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}=\omega+\varepsilon\{\boldsymbol{Z}(\phi_2)\cdot\boldsymbol{V}(\phi_2,\phi_1)+g_2(\phi_2)\}\end{cases} \tag{2.12}$$

ここで $\boldsymbol{V}(\phi_1,\phi_2)=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_0(\phi_1),\boldsymbol{X}_0(\phi_2))$ は ϕ_1，ϕ_2 に関して 2π 周期関数。$g_1(\phi)=\boldsymbol{Z}(\phi)\cdot\delta\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}_0(\phi))$，$g_2(\phi)=\boldsymbol{Z}(\phi)\cdot\delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(\phi))$ は ϕ に関する 2π 周期関数である。位相のずれ ψ_1，ψ_2 を $\psi_1=\phi_1-\omega t$，$\psi_2=\phi_2-\omega t$ で定義する。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon\{\boldsymbol{Z}(\omega t+\psi_1)\cdot\boldsymbol{V}(\omega t+\psi_1,\omega t+\psi_2)+g_1(\omega t+\psi_1)\}\\ \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon\{\boldsymbol{Z}(\omega t+\psi_2)\cdot\boldsymbol{V}(\omega t+\psi_2,\omega t+\psi_1)+g_2(\omega t+\psi_2)\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

ψ_1, ψ_2 は ε のオーダーでゆっくり変化するが，右辺のかっこの中は周期 T で速く変化する。右辺のかっこの中を，ψ_1, ψ_2 を一定として時間平均したもので近似する。

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = \varepsilon \{ \Gamma(\psi_1 - \psi_2) + \delta\omega_1 \} \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = \varepsilon \{ \Gamma(\psi_2 - \psi_1) + \delta\omega_2 \} \end{cases} \tag{2.14}$$

ここで

$$\Gamma(\psi_\alpha - \psi_\beta) = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \boldsymbol{Z}(\omega t + \psi_2) \cdot \boldsymbol{V}(\omega t + \psi_\alpha, \omega t + \psi_\beta)$$

$$\delta\omega_\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, g_\alpha(\omega t + \psi_\beta) \tag{2.15}$$

2つの振動子の位相差 $\psi = \phi_1 - \phi_2 = \psi_1 - \psi_2$ は

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon \{ \Delta + \Gamma(\psi) - \Gamma(-\psi) \} \tag{2.16}$$

に従う。この式が安定な平衡解 ψ_{eq} をもつということは2つの振動子が一定の位相差 ψ_{eq} をもって同期して振動することを表わす。2つの振動子の自然振動数の差 $\varepsilon\Delta = \varepsilon(\delta\omega_1 - \delta\omega_2)$ が大きくなると，(2.16)式に安定な平衡点がなくなり，相互引き込みが不可能になる。もとの位相変数 ϕ_1, ϕ_2 を使って(2.14)式を書き直すと，

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + \varepsilon\Gamma(\phi_1 - \phi_2) \\ \dfrac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \varepsilon\Gamma(\phi_2 - \phi_1) \end{cases} \tag{2.17}$$

ただし $\omega_1 = \omega + \varepsilon\delta\omega_1$, $\omega_2 = \varepsilon\delta\omega_2$ で $\Gamma(\phi)$ は ϕ の 2π 周期関数である。全く同じ振動子が2つ結合しても位相がそろうだけで，振動のようすは単独の時とかわらない場合，つまり $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = 0$ の場合は $\Gamma(0) = 0$ となる。

こうしてリミットサイクル振動子が摂動を受けた系の位相の従う方程式(2.11)，(2.17)が得られ，強制引き込みや相互引き込みがこの位相による表示で理解できることがわかった。

2－2　Stuart-Landau方程式の位相表示

次に具体的な例として，2コのStuart-Landau方程式を結合させた系で，位相方程式を導く。Stuart-Landau方程式はHopf分岐の近傍で一般に成立する方程式で，複素平面W＝X＋iY上の微分方程式として次の形で表わせる。

$$\frac{dW}{dt} = (1 + iC_0)W - (1 + iC_2)|W|^2 W \tag{2.18}$$

この方程式はリミットサイクル解

$$W_0(t)=X_0(t)+Y_0(t)=e^{i\omega_0 t} \qquad \omega_0=C_0-C_2 \tag{2.19}$$

をもつ。リミットサイクル軌道Lは単位円である。isochronを $\phi=\Phi-f(R)$ の形でみつけよう。ただし $R=\sqrt{X^2+Y^2}$, $\tan\Phi=\dfrac{Y}{X}$, $X=R\cos\Phi$, $Y=R\sin\Phi$ である。

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{X}}\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial X},\ \frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)=\left(\frac{-\sin\Phi}{R}-\frac{df}{dR}\cos\Phi,\ \frac{\cos\Phi}{R}-\frac{df}{dR}\sin\Phi\right) \tag{2.20}$$

スカラー場 ϕ を求めるため(2.3)式をあらわに書きくだす。

$$(\mathrm{grad}_{\boldsymbol{X}}\phi)\cdot F(\boldsymbol{X})=-\frac{df}{dR}(1-R^2)R+C_0-C_2R^2=\omega_0=C_0-C_2 \tag{2.21}$$

(2.21)式を解くと

$$f(R)=C_2\ln R \tag{2.22}$$

従ってisochronは $\phi=\Phi-C_2\ln R$ で表わされ，等角らせん(対数らせん)形をしていることがわかる。(図2.3)

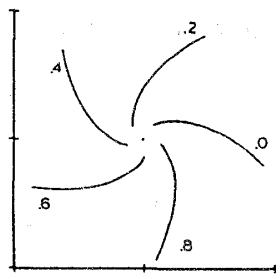


図2.3 isochron

2この振動子の結合系の方程式を

$$\begin{cases} \dfrac{dW_1}{dt}=\{1+i(C_0+\varepsilon\delta\omega_1)\}W_1-(1+iC_2)|W_1|^2W_1 \\ \qquad\qquad +\varepsilon(1+iC_1)(W_2-W_1) \\ \dfrac{dW_2}{dt}=\{1+i(C_0+\varepsilon\delta\omega_2)\}W_2-(1+iC_2)|W_2|^2W_2 \\ \qquad\qquad +\varepsilon(1+iC_1)(W_1-W_2) \end{cases} \tag{2.23}$$

とする。

(2.12)式における $\boldsymbol{Z}(\phi_1)\cdot\boldsymbol{V}(\phi_1,\phi_2)$, $g(\phi_1)$ は今の場合はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(\phi_1)\cdot\boldsymbol{V}(\phi_1,\phi_2)&=(\mathrm{grad}\,\phi)_{\substack{R=1\\ \Phi=\phi}}\cdot\boldsymbol{V}(W_0(\phi_1),W_2(\phi_2))_{\substack{R=1\\ \Phi=\phi}}\\ &=(-\sin\phi_1-C_2\cos\phi_1,\ \cos\phi_1-C_2\sin\phi_2)\\ &\quad\cdot(\cos\phi_2-\cos\phi_1-C_1(\sin\phi_2-\sin\phi_1),\ \sin\phi_2-\sin\phi_1+C_1(\cos\phi_2-\cos\phi_1))\\ &=-(1+C_1C_2)\sin(\phi_1-\phi_2)-(C_1-C_2)\{1-\cos(\phi_1-\phi_2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(\phi_1)&=(\mathrm{grad}\,\phi)\cdot\delta\boldsymbol{F}_1(W_0(\phi_1))\\ &=(-\sin\phi_1-C_2\cos\phi_1,\ \cos\phi_1-C_2\sin\phi_1)\cdot(-\delta\omega_1\sin\phi_1,\ \delta\omega_1\cos\phi_1)\\ &=\delta\omega_1\end{aligned}$$

同様に

$$\boldsymbol{Z}(\phi_2)\cdot\boldsymbol{V}(\phi_2,\ \phi_1)=-(1+C_1C_2)\sin(\phi_1-\phi_2)-(C_1-C_2)\{1-\cos(\phi_2-\phi_1)\}$$

$$g(\phi_2)=\delta\omega_2 \tag{2.24}$$

(2.24)式には振動数ωで速く変化する部分がないので(2.17)式がただちに得られる。

$$\begin{cases}\dfrac{d\phi_1}{dt}=\omega_1-K\{\sin(\phi_1-\phi_2+\alpha)-\sin\alpha\}\\[2ex]\dfrac{d\phi_2}{dt}=\omega_2-K\{\sin(\phi_2-\phi_1+\alpha)-\sin\alpha\}\end{cases} \tag{2.25}$$

ただし，$\omega_1=\omega_0+\varepsilon\delta\omega_1$，$\omega_2=\omega_0+\varepsilon\delta\omega_2$，

$$K=\varepsilon\sqrt{(1+C_1C_2)^2+(C_1-C_2)^2},\quad \tan\alpha=\frac{-(C_1-C_2)}{1+C_1C_2}$$

$\omega_1-\omega_2$やKはεのオーダーの小さな数であるが，引き込みにおいて重要な量はその比$\dfrac{\omega_1-\omega_2}{K}$である。それ自身の大きさは振動数$\omega_0$で回転する系にのり，時間のスケールを$\dfrac{1}{\varepsilon}$に拡大することにより1のオーダーの量に変換することができる。これ以後，ω_1，ω_2，Kを1のオーダーの量と考えて計算をすすめる。

2－3　2この振動子の相互引き込み

(2.25)式より，2この振動子の位相の平均$\bar{\phi}=(\phi_1+\phi_2)/2$と位相差$\Delta\phi=\phi_1-\phi_2$は次の方程式に従う。

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{\phi}}{dt}=(\omega_1+\omega_2)/2+K\sin\alpha\,(1-\cos\Delta\phi)\\[2ex]\dfrac{d\Delta\phi}{dt}=(\omega_1-\omega_2)-2K\cos\alpha\sin\Delta\phi\end{cases} \tag{2.26}$$

もし$|\omega_1-\omega_2|/|2K\cos\alpha|>1$なら$\Delta\phi$は単調に増加または減少する。つまり2つの振動子は互いに同期できず，準周期運動を示す。それぞれの振動子の平均振動数を

$$\tilde{\omega}_\alpha=\lim_{T\to\infty}\frac{\phi_\alpha(T)-\phi_\alpha(0)}{T}\qquad(\alpha=1,2) \tag{2.27}$$

で定義すると，(2.25)式の解析より

$$\begin{cases}\tilde{\omega}_1=(\omega_1+\omega_2)/2+K\sin\alpha+(\omega_1-\omega_2)/2\sqrt{1-\left(\dfrac{2K\cos\alpha}{\omega_1-\omega_2}\right)^2}\\[2ex]\tilde{\omega}_2=(\omega_1+\omega_2)/2+K\sin\alpha-(\omega_1-\omega_2)/2\sqrt{1-\left(\dfrac{2K\cos\alpha}{\omega_1-\omega_2}\right)^2}\end{cases} \tag{2.28}$$

となる。

逆に結合定数が大きく，$|\omega_1-\omega_2|/|2K\cos\alpha|<1$ の場合には，$\Delta\phi$に安定な平衡点が１つ存在し，２コの振動子は $\Delta\phi$ を位相差として，一定の振動数で周期運動を行なう。$K_C=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2\cos\alpha}$ が相互引き込みのための臨界値となる。位相差は

$$\Delta\phi=\sin^{-1}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2K\cos\alpha}\right),\qquad K\cos\alpha\cos\Delta\phi>0 \tag{2.29}$$

と表わされ，相互引き込みが生じているときの両振動子の振動数は

$$\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2=(\omega_1+\omega_2)/2+K\sin\alpha-(\omega_1-\omega_2)/2\ \tan\alpha\sqrt{\left(\frac{2K\cos\alpha}{\omega_1-\omega_2}\right)^2-1}$$

となる。

結合の強さを変えた時の平均振動数のふるまいを図 2.4 に示す。$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ なら相互引き込みが生じた後の振動数は自然振動数の平均値 $(\omega_1+\omega_2)/2$ より高くなっている。これは(2.26)式の $(1-\cos\Delta\phi)\sin\alpha$ の項を通じて位相差が振動数を高めるからである。§1 の心臓や小腸の例でも相互引き込みによって，振動数が高まる傾向があった。$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の系がいくらか現実に近いモデルになっているといえる。

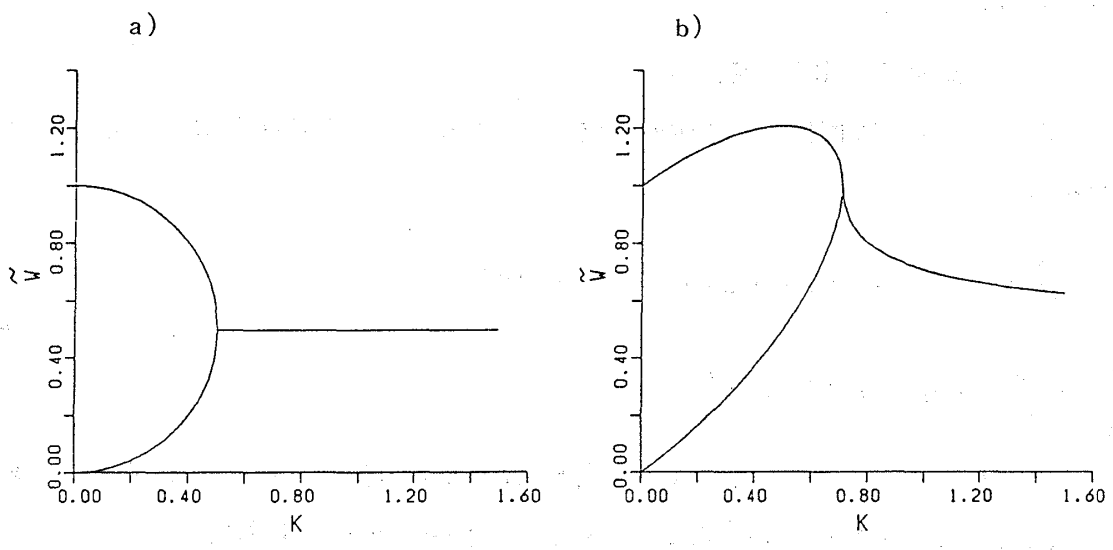


図 2.4　２コの振動子系の相互引き込み

a）$\alpha=0$　　b）$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

§３　平均場結合モデル

３－１　モデルとセルフコンシステント方程式による解析

多数の振動子が相互作用をおよぼしあっている系のふるまいを，(2.25)式を N 変数に拡張したモデルを使って調べる。

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \sum_{j=1}^{N} K_{ij} \{ \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha) - \sin\alpha \} \tag{3.1}$$

ϕ_i は i 番目の振動子の位相，N は全振動子数。自然振動数 ω は振動子ごとに異なり，その分布を $g(\omega)$ とする。$|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ とする。K_{ij} は j 番目の振動子と i 番目の振動子の結合の強さを表わす。この章では $K_{ij} = K/N$，つまり各振動子は全振動子から同じ強さの結合力を受けている場合を扱う。

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} \{ \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha) - \sin\alpha \} \tag{3.2}$$

この系は相転移の理論における平均場近似が正確に成立つ系で，さまざまな量が解析的に計算できる。複素オーダーパラメーターを次の式で定義する。

$$\sigma \exp(\mathrm{i}\theta) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \exp(\mathrm{i}\phi_j) \tag{3.3}$$

N が無限大の系で，十分時間が経過した後には，σ の値は一定になり θ は $\theta = \Omega t$ と一定の振動数で進むようになると考えられる。σ と Ω を一定と仮定して計算を進める。(3.2) 式は $\psi_i = \phi_i - \Omega t - K \sin\alpha\, t + \alpha$ を使って，次式に書きかえられる。

$$\dot{\psi}_i = \omega_i - \Omega - K\sigma \sin\psi_i \tag{3.4}$$

この式は各振動子が独立に平均場 $K\sigma$ を受けていることを表わしている。(3.4) 式の解は $t \to \infty$ で

$$\psi_i = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\dfrac{\omega_i - \Omega}{K\sigma}\right) & |\omega_i - \Omega/K\sigma| \leq 1 \quad (3.5\mathrm{a}) \\ (\tilde{\omega}_i - \Omega - K\sin\alpha)\, t + h((\tilde{\omega}_i - \Omega - K\sin\alpha)\, t) & |\omega_i - \Omega/K\sigma| > 1 \quad (3.5\mathrm{b}) \end{cases}$$

に近づく。$h(x)$ は x のある 2π 周期関数である。(3.5a) は ω_i がマクロな振動の振動数 Ω に近いので平均場に同期する振動子の状態を表わしており，(3.5b) は ω_i が Ω と離れているので平均場の運動に同期できない振動子のふるまいを表わしている。その振動子の振動数 $\tilde{\omega}_i$ は

$$\tilde{\omega}_i = \Omega + K\sin\alpha + (\omega_i - \Omega)\sqrt{1 - \left(\frac{K\sigma}{\omega_i - \Omega}\right)^2} \tag{3.6}$$

で与えられる。一方オーダーパラメーター σ は定義より ψ を使って表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma \exp(\mathrm{i}\alpha) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi\, n(\psi) \exp(\mathrm{i}\psi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, g(\omega) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi\, n(\psi;\omega) \exp(\mathrm{i}\psi) \end{aligned} \tag{3.7}$$

$n(\psi)$ は位相 ψ をもつ振動子の数密度を表わし，$n(\psi;\omega)$ は自然振動数が ω の振動子のうち位

相ψをもつ振動子の数密度を表わす。位相の分布 $n(\psi)$ は同期した振動子からの寄与 $n_s(\psi)$ と非同期振動子からの寄与の和である。同期部分は（3.5a）式で与えられる$\omega-\psi$関係を使って，自然振動数分布 $g(\omega)$ で表わすことができる。

$$n_s(\psi)=g(\omega)\frac{d\omega}{d\psi}=g(\Omega+K\sigma\sin\psi)K\sigma\cos\psi \qquad |\psi|\leq\frac{\pi}{2} \tag{3.8}$$

非同期成分 $n_{ds}(\psi;\omega)$ は

$$\dot{n}_{ds}(\psi;\omega)=-\frac{\partial}{\partial\psi}\left[(\omega-\Omega-K\sigma\sin\psi)n_{ds}(\psi;\omega)\right] \tag{3.9}$$

をみたす。（3.9）式の定常解を使って

$$n_{ds}(\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega-\Omega|>K\sigma}d\omega\, g(\omega)(\omega-\Omega)\sqrt{1-\left(\frac{K\sigma}{\omega-\Omega}\right)^2}\Big/(\omega-\Omega-K\sigma\sin\psi) \tag{3.10}$$

（3.8）式と（3.10）式は位相分布がσとΩによって決まることを示し，（3.7）式は位相分布によってσが決まることを示している。（3.8）式と（3.10）式を（3.7）式に代入することによって，σとΩに関するセルフコンシステント方程式が得られる。（3.10）式の右辺において $\sin\theta=K\sigma/(\omega-\Omega)$ によってωからθに積分変数を変えることにより，1回積分を行なう。結局，次のセルフコンシステント方程式が得られる。[10),18)]

$$\sigma\exp(i\alpha)=K\sigma\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\, g(\Omega+K\sigma\sin\psi)(\cos\psi\, e^{i\psi}+iJ\right\} \tag{3.11}$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\frac{\cos\psi(1-\cos\psi)}{\sin^3\psi}\left\{g\left(\Omega+\frac{K\sigma}{\sin\psi}\right)-g\left(\Omega-\frac{K\sigma}{\sin\psi}\right)\right\} \tag{3.12}$$

$\sigma=0$は常に（3.12）式の解である。ある臨界値K_C以上で$\sigma\neq 0$の解が出現することが期待される。臨界値近傍ではσは小さいと思われるので，（3.11）式をσでTaylor展開して，K_C近傍の解を求める。$\alpha=0$で$g(\omega)$が対称分布の場合，Ωを分布の中心値にとれば，$J=0$となり，（3.11）式はσのみに関する式となり，問題は容易になる。（3.12）式の積分は$\frac{K\sigma}{\sin\psi}$の項を含んでいるので，$\sigma\to 0$でも0にはならない。ψが小さい所からの寄与に注意して計算してやると，結果として次のJ_1，J_2を使って，σ,Ωを表わすことができることがわかる。

$$J_1(\Omega)=\int_0^{\infty}dX\{g(\Omega+x)-g(\Omega-X)\}/2X$$

$$J_2(\Omega)=\int_0^{\infty}dX\{g(\Omega+X)-g(\Omega-X)-2X\,g'(\Omega)\}/8X^3$$

臨界値K_Cは

$$K_C = 2\cos\alpha/\pi g(\Omega_C) \tag{3.13}$$

Ω_C は K_C で出現する自明でない解の臨界振動数であり，

$$J_1(\Omega_C) = \frac{\pi}{2} g(\Omega_C)\tan\alpha \tag{3.14}$$

を解くことによって求められる。

臨界値近傍では $\sigma^2 = a(K-K_C)+O((K-K_C)^2)$，$\Omega=\Omega_C+b(K-K_C)+O((K-K_C)^2)$ となる。ここで a，b はある定数である。この式は2次相転移の存在を表わしている。

ここで求めた自明でない解は，$K>K_C$ で出現する場合（$a>0$），安定な解で，$K<K_C$ で出現する場合（$a<0$），不安定と期待されるが，上の解析は安定性に関して何も言っていない。$\alpha=0$ で $g(\omega)$ が対称の場合は a の符号は $-g''(\Omega_C)$ で決まる。この場合上のセルフコンシステント方程式を拡張して，σ についてのゆっくりした時間発展を記述する方程式を導くことができる。この計算の結果，a の符号と安定性の関係は期待どおりになることがわかっている。（蔵本と西川）

σ は位相の分布のかたよりを表わす量で，熱平衡XYスピン系のオーダーパラメーターと同じ意味をもつ量である。相互引き込みは振動数がそろってくることが特徴なので，相互引き込みの程度を表わす量として r と呼ぶオーダーパラメーターを定義する。

$$r = N_s/N \tag{3.15}$$

N_s は集団振動と同じ振動数（$\Omega+K\sin\alpha$）で振動する振動子の数。N は全振動子数。r は集団振動に引き込まれている振動子の割合を表わしている。(3.5) 式より自然振動数 ω が $|\omega-\Omega|<K\sigma$ をみたす振動子が r に寄与する。従って K_C 近傍では

$$r = \int_{\Omega-K\sigma}^{\Omega+K\sigma} g(\omega)\,\mathrm{d}\omega \simeq 2g(\Omega_C)K\sigma + O(\sigma^3) \tag{3.16}$$

となる。相互作用の結果の各振動子の振動数を $\tilde{\omega}$ とすると，$\tilde{\omega}$ の分布 $G(\tilde{\omega})$ は (3.5) 式より，

$$G(\tilde{\omega}) = r\delta(\tilde{\omega}-\Omega-K\sin\alpha) + g\left(\Omega+\sqrt{(\tilde{\omega}-\Omega-K\sin\alpha)^2+K^2\sigma^2}\right)\Big/\sqrt{1+\left(\frac{K\sigma}{\tilde{\omega}-\Omega-K\sin\alpha}\right)^2} \tag{3.17}$$

3－2　計算機シミュレーション

セルフコンシステント方程式の解析から，結合力がある臨界値以上ではオーダーパラメーター σ や r がゼロでない解が出現することがわかった。これは熱平衡での相転移に似た協力現象

である。振動子が互いに協力してマクロなオーダーをつくり，そのマクロな振動に多くの振動子が引き込まれている。セルフコンシステント方程式の解析は振動子数が無限大でオーダーパラメーターや各振動子のふるまいが定常であることを仮定して議論した。この議論の有効性を確かめるため，$N=1000$ の系で計算機シミュレーションを行なった。数値計算の方法として，Euler 差分法を用いた。

$$\phi_i(t+\tau)=\phi_i(t)+\tau\left[\omega_i-\frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\{\sin(\phi_i-\phi_j+\alpha)-\sin\alpha\}\right] \tag{3.18}$$

τ として 0.1 をとった。自然振動数分布 $g(\omega)$ としては平均 0 で分散 W^2 の Gauss 分布を仮定した。分布が完全に対称になるようにわざと $\omega_{2i}=-\omega_{2i+1}$ の条件を加えた。α として 0 と $\pi/4$ の 2 つの値を選んだ。連続時間モデル（3.2）では g の平均値が ω_0 の場合は，$\phi_i \to \phi_i+\omega_0 t$ と変数変換を行なうことによって $\omega_0=0$ と同等な系となるので，最初から平均を 0 とおいても一般性を失わない。（3.2）式では，W/K が一定の下で W と K が変化しても，時間スケールを適当に変えるこ

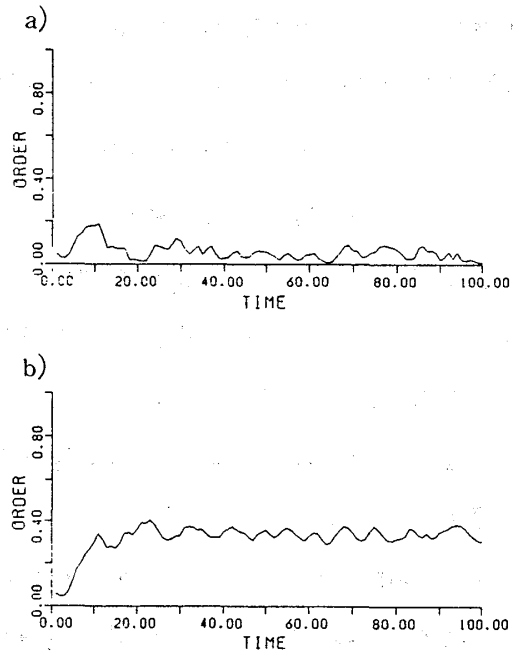


図 3.1　σ-t のグラフ
初期条件 [0　2π] の一様乱数
$g(\omega)$ 分散 1 の Gaussian
a)　$K=K_C-0.1$　b)　$K=K_C+0.1$

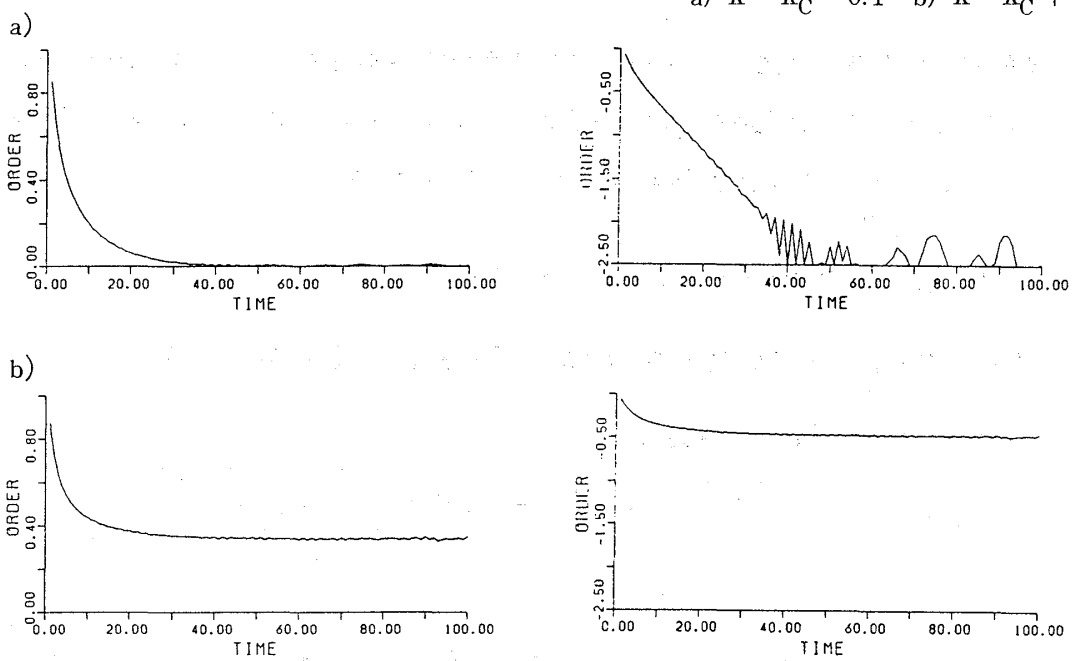


図 3.1　左 σ-t のグラフ　初期　$\phi_i(0)=0$
右 log σ-t のグラフ
a)　$K=K_C-0.1$　b)　$K=K_C+0.1$

とによりもとと同等な系となる。つまり系の定常的なふるまいはパラメーターW/Kだけで決まる。初期条件として，全振動子が完全に同じ方向を向いている場合，即ち$n(\phi)=\delta(\phi)$と，各振動子の初期値を$[0, 2\pi]$の一様乱数で選んだ場合，即ち$n(\phi)=\dfrac{1}{2\pi}$の2通を用いた。オーダーパラメーターσはどちらの場合もすみやかにほぼ一定になった。(図3.1) $n(\phi)=\delta(\phi)$の初期条件の場合，定常状態への時間変化を片対数グラフ($t-\log_{10}\sigma$のグラフ)にプロットすると，直線によくのり指数関数的に緩和することがわかる。実際はNが有限なので，定常値のまわりにゆらぎが重なっている。このゆらぎは集団振動に引き込まれていない振動子から生じるものと思われる。複素平面上に，ある時間間隔ごとにσをプロットしていったものを(図3.2)に示す。W/Kが臨界値以上では，原点を中心にほぼ等方的に分布している。W/Kが臨界値以上ではセルフコンシステント方程式の解のまわりにほぼ等方的に分布している。熱平衡系ではNが有限だと，σは円周上を拡散してゆき，長時間平均をとると0になってしまう。われわれのモデルではシミュレーションの時間内では拡散する傾向はみられなかった。つまりNが有限でも相転移に対応するものがあると考えられる。

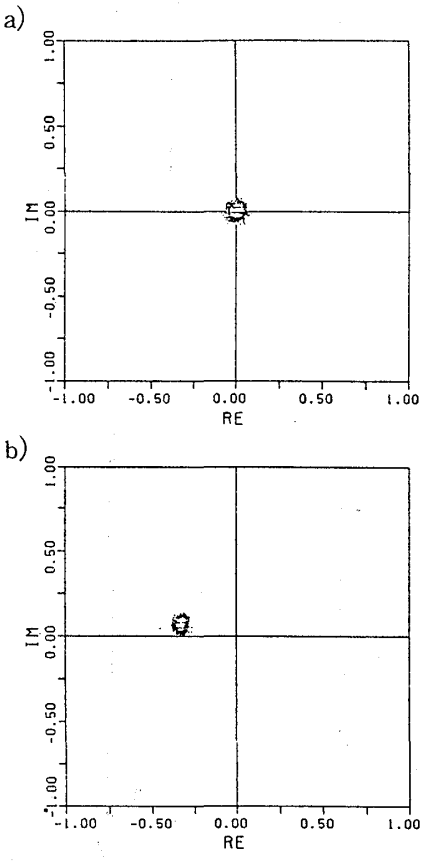


図3.2　複素オーダーパラメーターの複素平面内の運動
a) $K=K_C-0.1$
b) $K=K_C+0.1$

シミュレーションで得られたσとrをセルフコンシステント方程式の数値解と比較したものを図3.3に示す。実線で示しているのがセルフコンシステント方程式から得られた解である。セルフコンシステント方程式の解はもとのモデル(3.2)の特解の1つにすぎないが，その解が唯一の安定な解であることがわかる。また時間ステップ0.1のEuler差分がもとの連続時間モデルをかなりよく再現していることがわかる。以下しばしばこのEuler差分でシミュレーションをおこなっているが，その正当性の1つが解析解のわかっている今の平均場モデルではシミュレーションによる結果とよくあっていることである。図3.4はオーダーが存在する状態での振動数$\tilde{\omega}$の分布を表わしている。やはりシミュレーションと解析解はよくあっている。$\alpha=0$では振動数分布は$g(\omega)$の平均値の位置にδ関数的ピークをもち，そのまわりに対称な形をしている。$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$の場合はδ関数的ピークの位置は$g(\omega)$の平均より高いところにあり，分布の形も非対称になっている。δ関数ピークの近傍に自然振動数をもつ振動子は集団振動に引き込まれ，そのピ

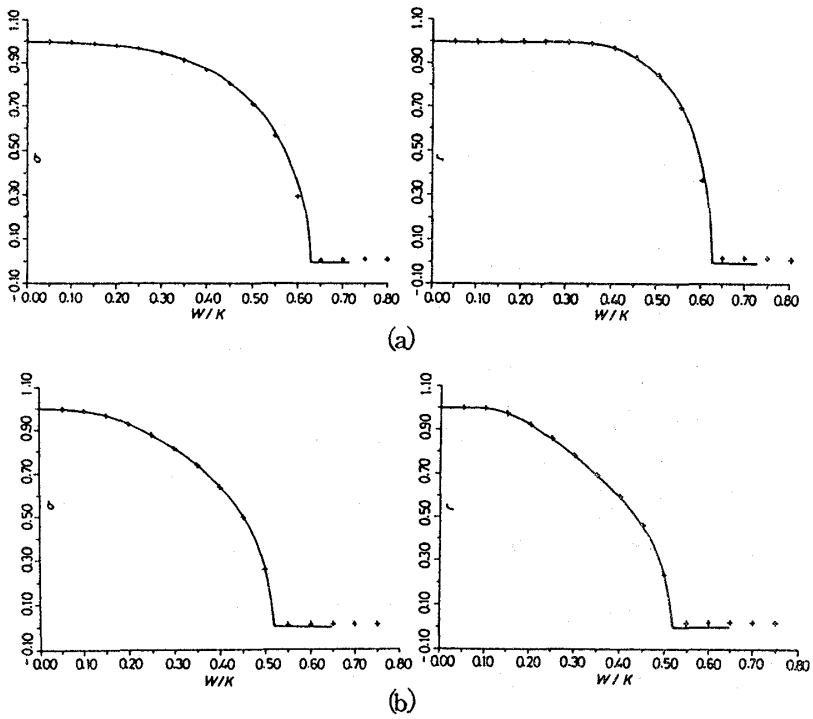


図 3.3　オーダーパラメーター σ と r
a) $\alpha=0$　　b) $\alpha=\frac{\pi}{4}$

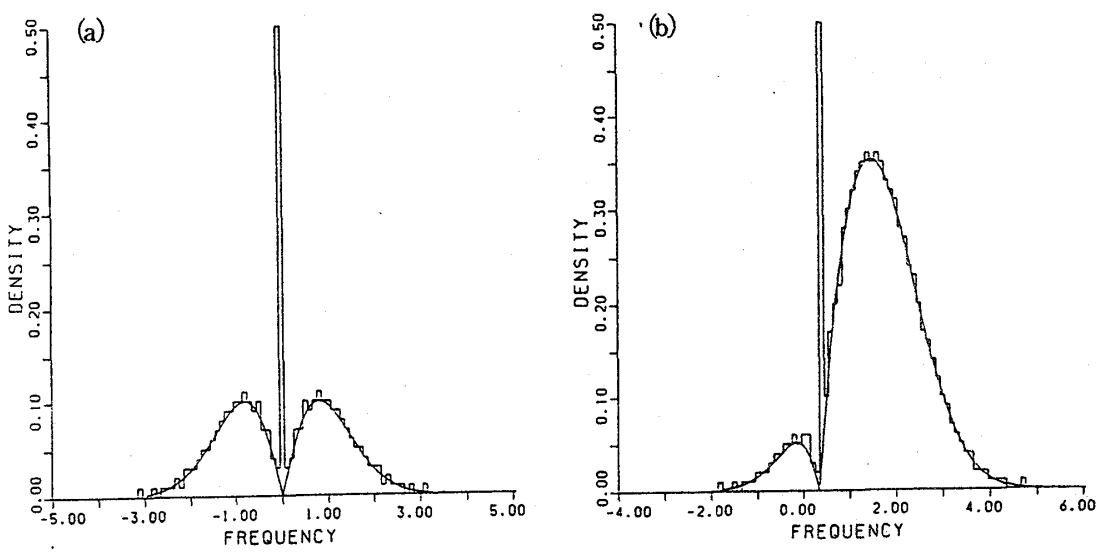


図 3.4　振動数分布　$G(\tilde{\omega})$
a) $\alpha=0$, $W/K=0.55$　b) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $W/K=0.5$

ークを形づくる。一方集団振動の振動数からかなり離れた値の自然振動数をもつ振動子の振動数はもとの自然振動数とあまり変わらない。結果として δ 関数ピークの両側に振動数分布のへこみが生じる。この振動数分布の形の特徴は α によらない。δ 関数ピークの位置，つまり集団振動の振動数 Ω を W/K の関数として表わしたものを図 3.5 に示す。$\alpha=\frac{\pi}{4}$ では Ω は一たん Ω_C より大きくなり，$W/K\to 0$ では自然振動数分布の平均値 0 になる。その間ずっと Ω は 0 より大

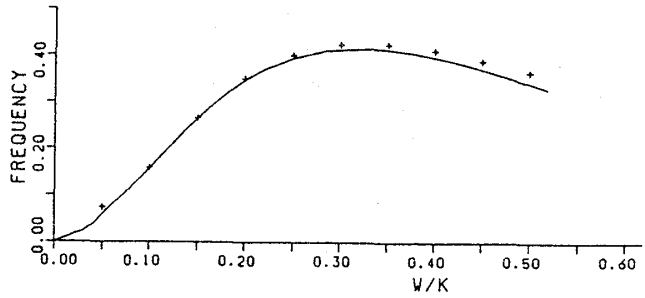


図 3.5　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$　マクロな振動の振動数

きくなっている。平均場モデルでも位相差が振動数を高める効果をもっているわけである。

§4　1次元oscillator lattice

4－1　1次元振動子系における引き込み

3章では，各振動子が他のすべての振動子と同等に相互作用している系のふるまいを調べ，相互引き込みを介した相転移が生じることがわかった。他のすべての振動子と同じ強さで結合していることから，平均場近似の取り扱いが厳密に成り立ち解析が容易になった。1章で紹介したような現実の系では，必ずしも一様な結合は期待できない。むしろ相互作用の範囲が短距離に限られていると考えた方が適当と思われる。以下の章では各振動子をd次元立方格子の格子点上に並べ，それらが最近接相互作用をおよぼしあっている系のふるまいを議論する。この系のことを以後oscillator latticeと呼ぶことにする。振動子のモデルとして，やはり位相モデル(3.1)式を使う。

$$\dot{\phi}_i=\omega_i-\sum_{j=1}^{N}K_{ij}\{\sin(\phi_i-\phi_j+\alpha)-\sin\alpha\} \tag{4.1}$$

ただしiは格子点の位置を表わし，ϕ_iはその格子点上にある振動子の位相を表わす。K_{ij}はiとjが互いに最近接格子点である時のみある一定値Kをとる。3章で調べた平均場結合モデルは無限次元oscillator latticeと同等である。この章では1次元 oscillator latticeのふるまいを調べる。

$$\dot{\phi}_i=\omega_i-K\{\sin(\phi_i-\phi_{i-1}+\alpha)+\sin(\phi_i-\phi_{i+1}+\alpha)-2\sin\alpha\}$$
$$(i=-M,\ -M+1,\ \cdots\cdots 0,\ 1\cdots\cdots M) \tag{4.2}$$

この節では，自然振動数ω_iの分布が単純な系を扱い，1次元系の相互引き込みのようすを調べる。

まず最初に，すべての振動子が同等つまり$\omega_i=\text{constant}=0$で周期境界条件$\phi_{M+1}=\phi_{-M}$

が課せられている系を考える。この系には位相の勾配が一定の解，即ち $\phi_{i+1}-\phi_i=\varphi$ を満たす解が存在する。周期境界条件より勾配 φ は $(2M+1)\varphi=n\pi$（n は整数）を満たす場合に限られる。この解の線形安定性を調べるために，i 番目の振動子の位相 ϕ_i を次のように表わす。

$$\phi_i=\tilde{\omega}t+i\varphi+\delta\phi_i \tag{4.3}$$

(4.3) 式を (4.2) 式に代入し，$\delta\phi_i$ の 0 次の項，1 次の項から振動数 $\tilde{\omega}$ と $\delta\phi_i$ の線形方程式が得られる。

$$\tilde{\omega}=2K\sin\alpha(1-\cos\varphi)$$

$$\delta\dot{\phi}_i=-K\cos(\varphi+\alpha)(\delta\phi_i-\delta\phi_{i-1})-K\cos(-\varphi+\alpha)(\delta\phi_i-\delta\phi_{i+1}) \tag{4.4}$$

(4.4) 式はフーリエ変換 $\delta\phi_k=\sum_{j=-M}^{M}\delta\phi_j\exp(\mathrm{i}kj)$
$\left(k=\dfrac{2m\pi}{2M+1}\right.$ m は整数）を用いると容易に解ける。

$$\delta\dot{\phi}_k=\{-2K\cos\varphi\cos\alpha(1-\cos k)-\mathrm{i}2K\sin\varphi\sin\alpha\sin k\}\delta\phi_k \tag{4.5}$$

(4.5) 式より $\cos\varphi>0$ つまり傾きが $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある一定勾配の解は線形安定であることがわかる。その時の振動数は $2K\sin\alpha(1-\cos\varphi)$ となり，$\alpha>0$ なら勾配が大きいほど振動数は増加するが，$\alpha=0$ では位相勾配があっても振動数は変化しない。

次に原点に一つだけ他と自然振動数の異なる振動子をもつ系を考える。つまり $\omega_0=\omega$ でその他の格子点 i に関して $\omega_i=0$ である。この系において，全振動子の引き込みが生じる臨界結合定数 K_c を求めよう。引きこみ後の全振動子の振動数を $\tilde{\omega}$ とすると，

$$\phi_i=\tilde{\omega}t+\psi_i \tag{4.6}$$

と表わせる。対称性より $\psi_i=\psi_{-i}$ と考えられる。(4.6) を (4.2) 式に代入する。

$$\frac{\tilde{\omega}-\omega_i}{K}=\sin(\psi_{i+1}-\psi_i-\alpha)+\sin(\psi_{i-1}-\psi_i-\alpha)+2\sin\alpha \tag{4.7}$$

周期境界条件 $\phi_{M+1}=\phi_{-M}$ または自由境界条件 $\phi_{M+1}=\phi_M$，$\phi_{-M-1}=\phi_{-M}$ を課す。$\alpha=0$ の場合，(4.2) 式を $i=-M$ から M まで加えると，相互作用項はすべて打ち消しあう。

$$\sum_{i=-M}^{N}\dot{\phi}_i=(2M+1)\tilde{\omega}=\sum_{i=-M}^{N}\omega_i=\omega \tag{4.8}$$

従って $\tilde{\omega}=\dfrac{\omega}{2M+1}$ となり，全振動子は自然振動数の平均値で振動することがわかる。(4.7) 式と (4.8) 式より

$$\sin(\psi_0-\psi_1)=\sin(\psi_1-\psi_2)-\frac{\tilde{\omega}}{K}=\cdots=\sin(\psi_M-\psi_{M+1})-\frac{M\tilde{\omega}}{K}=-\frac{M\tilde{\omega}}{K} \tag{4.9}$$

もし $K > M\tilde{\omega} = \frac{M}{2M+1}\omega$ なら（4.9）式は解 $\psi_i - \psi_{i+1} = \sin^{-1}\left(-\frac{(M-i)\tilde{\omega}}{K}\right)$ をもつが，$K < \frac{M}{2M+1}\omega$ なら（4.9）式に解はなく，各振動子の振動数が一定という前提が成り立たなくなる。このことは引き込みの臨界結合定数 K_c が $\frac{M}{2M+1}\omega \sim \frac{1}{2}\omega$ であることを意味している。引き込み後の位相パターンは $\psi_i = \psi_0 - \sum_{j=0}^{i-1} \sin^{-1}\left(\frac{-(M-j)\tilde{\omega}}{M}\right)$ となり，原点を頂点とした富士山形をしている。（図4.1）

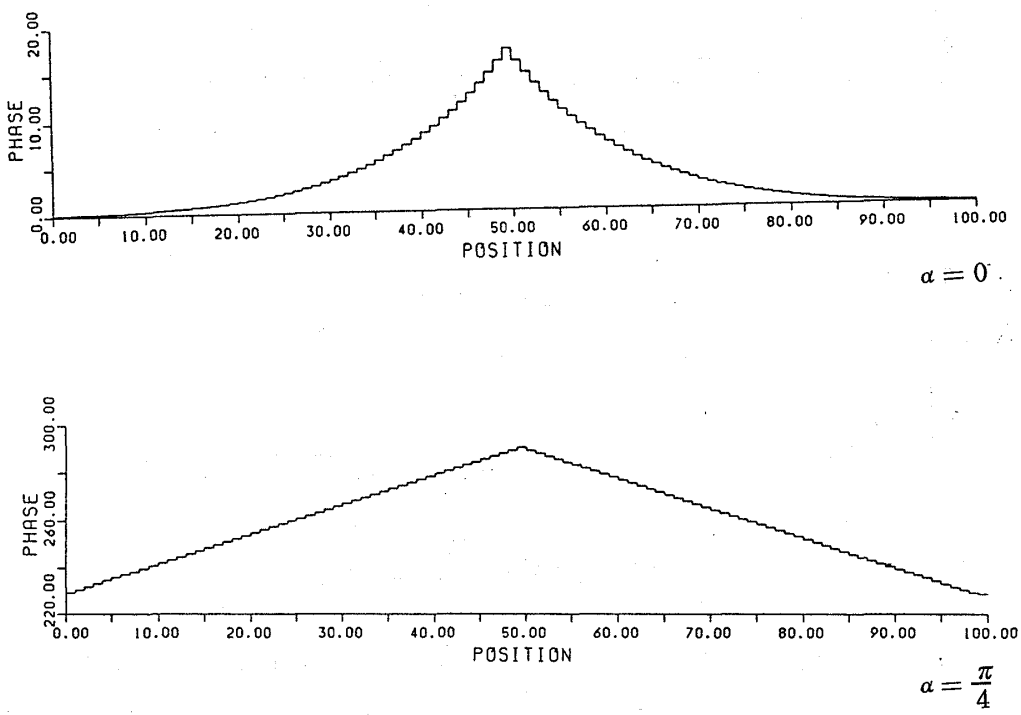


図 4.1　不純物振動子１コ

$\alpha \neq 0$ の場合は，シミュレーションの結果位相パターンが一定勾配の山形をしていることがわかる。（図4.1）位相の勾配がほぼ一定値 φ なので，i が負のときは $\psi_{i+1} = \psi_i + \psi$，$i$ が正のときは $\psi_{i+1} = \psi_i - \varphi$ と表わせる。この関係式を（4.7）式に代入する。

$$\begin{cases} \sin(\varphi-\alpha) - \sin(\varphi+\alpha) + 2\sin\alpha = 2\sin\alpha(1-\cos\varphi) = \frac{\tilde{\omega}}{K} & i \neq 0 \\ -2\sin(\varphi+\alpha) + 2\sin\alpha = \frac{\tilde{\omega}-\omega}{K} & i = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

（4.10）を解くと

$$\sin\varphi = \frac{\omega}{2K\cos\alpha}, \quad \tilde{\omega} = 2K\sin\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4K^2\cos^2\alpha}}\right) \tag{4.11}$$

位相勾配をつくることにより，各振動子の振動数が高まり，原点にあるはやい振動子と同期している。（4.11）より臨界値 K_c は $\frac{\omega}{2\cos\alpha}$ となる。α が大きくなるにつれ K_c も大きくなる。上の計算は $M \to \infty$ で厳密に成り立つが，十分大きな M でも近似的に成り立つ。

$\alpha=0$ と $\alpha>0$ の引き込みかたの違いに注目したい。この違いは，$i=-m+1$ から $i=m$ までの $2m$ この振動子の自然振動数が $\omega\,(>0)$ で他の自然振動数が 0 という自然振動数分布をもつ系のふるまいを見ればさらに明確になる。図 4.2 は $\alpha=0$ と $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ の引き込み直後の位

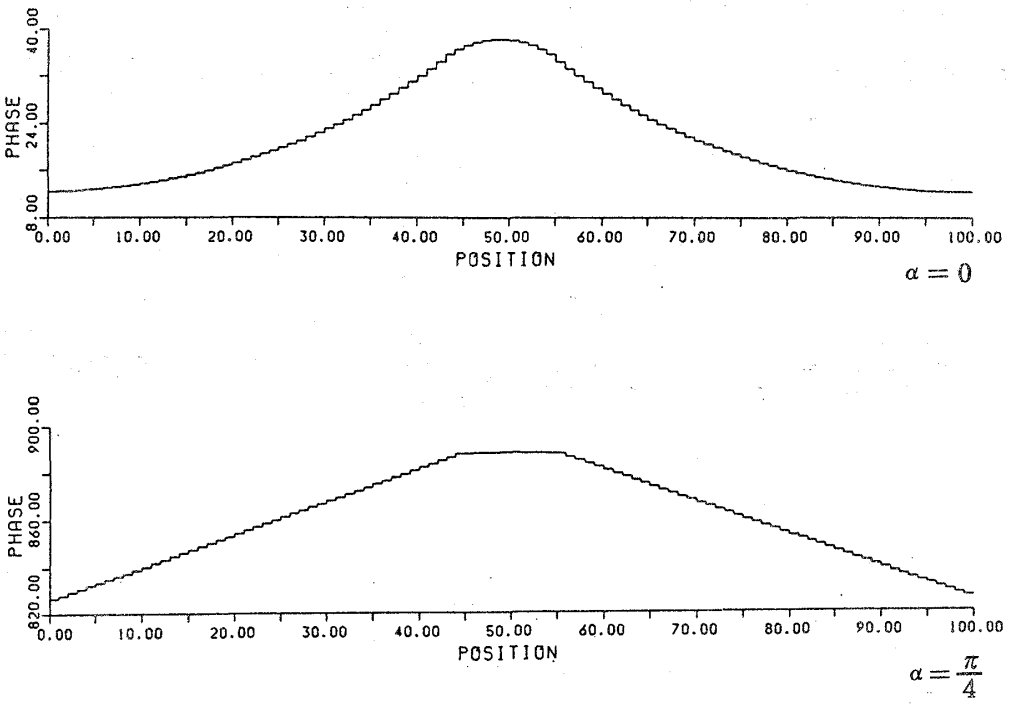


図 4.2　不純物振動子 15 コ

相パターンを示している。$\alpha=0$ では $i=-m+1$ から $i=m$ までを上に凸の放物線でその両側を下に凸の放物線でつないだなめらかな曲線で近似できる。前と同様全振動子の引き込みを仮定すると，(4.6)，(4.7) が成り立つ。(4.8) のかわりに

$$\sum_{i=-M}^{M}\dot{\phi}_i=(2M+1)\tilde{\omega}=\sum_{i=-M}^{M}\omega_i=2m\omega \tag{4.12}$$

が成り立ち，引き込み後の振動数は $\dfrac{2m\omega}{2M+1}$ となる。$i=\dfrac{1}{2}$ のまわりに対称なので，$\psi_{1+j}=\psi_{-j}$ が成り立つ。(4.7) 式より

$$\sin(\psi_{i+1}-\psi_i)=\frac{\tilde{\omega}-\omega}{K}+\sin(\psi_i-\psi_{i+1})=\frac{2(\tilde{\omega}-\omega)}{K}+\sin(\psi_{i-1}-\psi_{i-2})$$

$$=\frac{\mathrm{i}(\tilde{\omega}-\omega)}{K}+\sin(\psi_1-\psi_0)=\frac{\mathrm{i}(\tilde{\omega}-\omega)}{K}$$

従って $i=m$ で位相差が最大になる。

$$\sin(\psi_{m+1}-\psi_m)=\frac{m(\tilde{\omega}-\omega)}{K}=\frac{m\omega(2m-2M-1)}{K(2M+1)} \tag{4.13}$$

$K<K_c=\dfrac{m\omega(2M+1-2m)}{2M+1}$ の場合，(4.13) に解は存在しなくなり全振動子の引き込みは不

可能になる。Mが十分大きいと，$K_c \sim \frac{2m\omega}{2}$なので臨界結合定数は$2m$に比例して増大する。つまり局所的に自然振動数が他と異なる振動子が集まっていると，全振動子の引き込みが困難になる。協力して全振動子の引き込みを阻害しているといえるかもしれない。

一方$\alpha=\frac{\pi}{4}$の場合の位相パターンは台地状になっている。$i=-m+1$からmまではほぼ平らで，その両側に一定勾配の坂がつながっている。iが$-m+1$からmまではほぼ平らになっているので，(4.7)式に$\psi_{i+1}=\psi_i$を代入すると

$$\frac{\tilde{\omega}-\omega}{K}-2\sin\alpha=-2\sin\alpha \tag{4.14}$$

となり，$\tilde{\omega}=\omega$つまり速い振動子の自然振動数で振動することがわかる。$i<-m+1$の位相勾配をφとすると，

$$\frac{\tilde{\omega}}{K}=\frac{\omega}{K}=2\sin\alpha+\sin(\varphi-\alpha)-\sin(\varphi+\alpha)$$

従って

$$\cos\varphi=1-\frac{\omega}{2K\sin\alpha} \tag{4.15}$$

一定の位相勾配φをもつパターンは$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$でのみ安定なので，安定なパターンのうち$\cos\varphi$の最小値は0である。従って臨界結合定数$K_c$は$\frac{\omega}{2\sin\alpha}$程度と考えられる。$\alpha\neq 0$の場合，臨界結合定数は自然振動数が他と異なる振動子の数によらない。$\alpha=0$の場合に比べて，位相勾配をつくることによって振動数を変化させられることが全振動子の引き込みを容易にしている。

4－2　ランダム系

相互引き込みにおよぼすαの効果の一端を前節で調べた。この節ではω_iが各点で独立にランダムな値をとっている系の相互引き込みを調べる。ω_iの分布を$g(\omega)$とする。全振動子数Nが10000で，$g(\omega)$として平均0，分散1のガウス分布を用いて計算機シミュレーションを行なった。図4.3は$\alpha=0$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$で結合の強さを変えたときの各点の振動数を示している。ここで各点の振動数$\tilde{\omega}_i$は位相の平均増加率$\tilde{\omega}_i=\frac{\phi_i(T)-\phi_i(0)}{T}$($T$は計算時間)で計算した。この振動数パターンには多くのステップが見られる。振動子が局所的に相互引き込みをおこし振動数がそろったところがステップ状に見えているわけである。隣りのステップとの境界が明確である。逆にいうと，この図から局所的な相互引き込みがはっきりと存在することがわかる。Kを大きくすると，ステップが拡張し，結合の強さとともに相互引き込みが進行することを示している。$\alpha=0$の場合はステップの長さ，つまり相互引き込みのドメイン長がだいたいそろ

っているように見える。平均的なステップ長があり，それが結合の強さとともに長くなっている。$\alpha=\frac{\pi}{4}$の場合は，Kを大きくすると長いステップがますます長くなり，一方短いステップはKを大きくしても残っているように見える。図4.4はステップの数つまり相互引き込みドメ

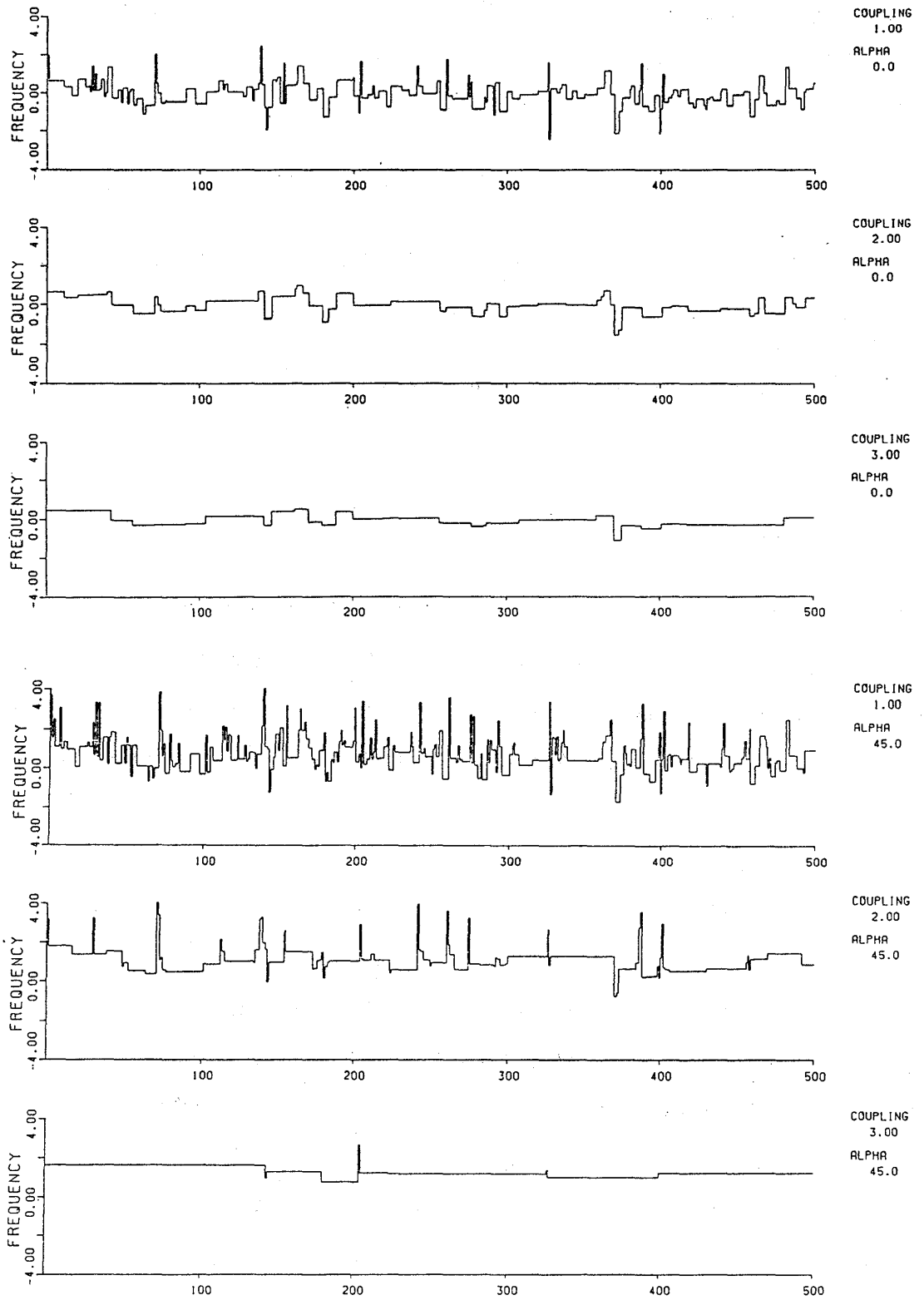


図4.3　振動数パターン

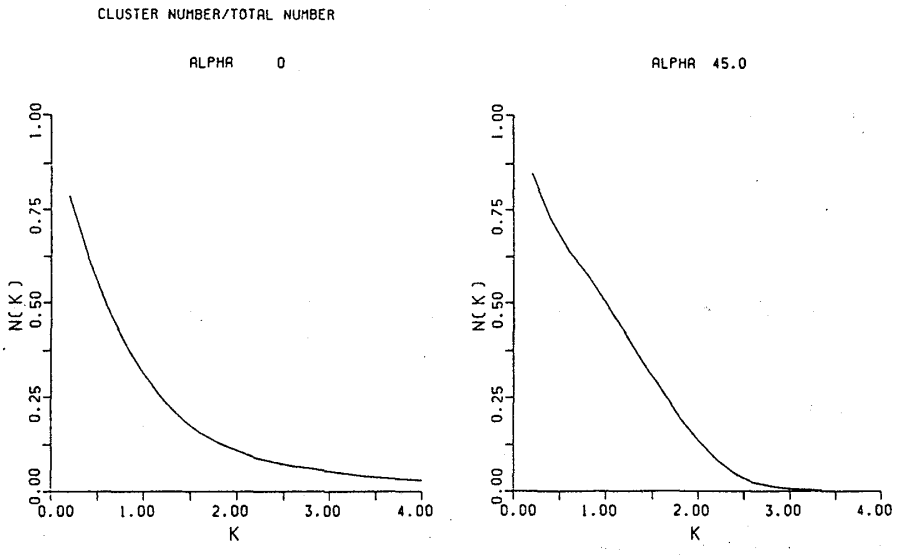
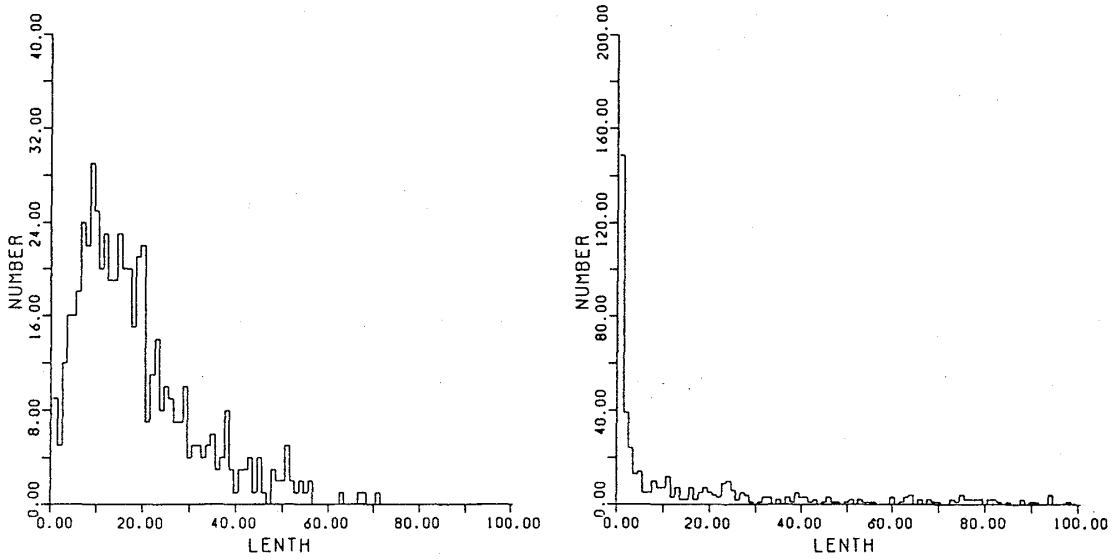


図 4.4

インの数と結合の強さの関係をグラフにしたものである。$\alpha=0$ の場合はドメイン数はほぼ $1/K^2$ に比例して減少している。ドメイン長がだいたいそろっているので，ドメイン長はドメイン数に反比例して K^2 で長くなる。$\alpha=\frac{\pi}{4}$ の場合はドメイン数は $\alpha=0$ の場合より急速に減少している。$\alpha=0$ より $\alpha=\frac{\pi}{4}$ のほうが相互引き込みが進行しやすいことを示している。自然振動数の局所的なゆらぎによって $\alpha=0$ の場合は引き込みが阻害されるが，$\alpha>0$ では位相勾配をつくることによって引き込みが進むという前節で議論した α の効果がランダム系でも効いているためと考えられる。図 4.5 にドメイン長の分布を示す。振動数パターンをながめた時の印象どおり，$\alpha=0$ ではある有限の平均ドメイン長のまわりに分布している。$\alpha=\frac{\pi}{4}$ では長さ 1，つまり隣りの振動子と同期していない振動子が一番多く，ドメイン長分布は長さとともにほぼ



$\alpha=0$　$K=3.0$　　$\alpha=\frac{\pi}{4}$　$K=2.4$

図 4.5　ドメインサイズ分布

単調に減少している。一方非常に長いドメインもわずかだが存在している。

§5　2次元，3次元oscillator lattice と相転移

5－1　相転移と次元

この節では，2次元正方格子，3次元立方格子上に振動子を並べた系（oscillator lattice）の相互引き込みを調べる。位相モデル（4.1）式で特に $\alpha=0$ の場合をとりあげる。

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \sum_j K_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) \tag{5.1}$$

K_{ij} は（4.1）式と同様格子点 j が i の最近接格子点であるときのみ一定値 K をとる。§4で議論したように1次元系では自然振動数の長波長ゆらぎのため全振動子の相互引き込みは生じない。一方§3で示したように，無限次元系では相互引き込みによる2次相転移が生じる。

熱平衡スピン系においても，低次元ではスピンの長波長ゆらぎのため，有限温度では相転移が起こらない。相転移の生じる最低の次元のことを lower critical dimension と呼ぶ。例えば，Ising モデルでは2次元系で Onsager の厳密解がわかっており，lower critical dimensionは2となる。XY モデル，Heisenberg モデルではオーダーパラメーターの出現する最低の次元は3である。oscillator lattice モデル（5.1）では何次元から相転移が起こるのだろうか。

相転移を特徴づける量として，§3で定義した2つのオーダーパラメーターを用いる。一つは位相のそろいかたの程度を示す複素オーダーパラメーターである。

$$\sigma \exp(\mathrm{i}\,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \exp(\mathrm{i}\,\phi_j) \tag{5.2}$$

他の一つは相互引き込みの程度を示すオーダーパラメーターで，

$$r = \frac{N_s}{N} \tag{5.3}$$

N は全振動数で，N_s は同一の振動数に引き込まれた振動子の数である。

5－2　シミュレーション

（5.1）式にもとづいて，一辺が L の正方格子または立方格子の系でシミュレーションを行なった。境界条件として周期境界条件を課し，初期条件として，$\phi_i(0)=0$，つまり全振動子の位相をそろえた。自然振動数 ω_i は分散1，平均0のガウス乱数で選んだ。

振動子の同期のようすを見るために，振動数パターンと呼ぶ図をつくる。格子点 i 上の振動子の振動数 $\tilde{\omega}_i$ がその最近接格子点 j 上の振動子の振動数 $\tilde{\omega}_j$ に十分近く，互いに引き込みあっているとみなせるとき，i と j の格子点間をボンドでつなぐ。この操作を全格子点で行なっ

てできる図が振動数パターンである。ボンドでつながっている振動子のクラスターは互いに引き込みあっている。このクラスターは1次元系の振動数の図にみられたステップにほぼ対応している。数値計算ではボンドでつなぐ条件として，ある時刻以降に，隣りの振動子との位相差がπをこえないことを基準として用いた。ボンドでつながった振動子のクラスターが一辺Lの正方格子または立方格子の端から端まで広がったときが，相互引き込みの一つの臨界点と考えることができる。Lが十分大きく，計算時間も十分大きくとれば，この相互引き込みのパーコレーションの臨界点とrの出現のための臨界点は一致すると考えられる。オーダーパラメーターσは$t=300$と$t=900$の間の数点で$\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\phi_i(t)}\right|^2$を計算し，その平均のルートで求めた。オーダーパラメーターrは，$\tilde{\omega}$のヒストグラムを間隔$\frac{\pi}{600}$で作り，その最大値N_sを使って，N_s/Nで求めた。

シミュレーションの結果を図で説明する。振動数のパターンを図5.1,図5.2に示す。図5.1は2次元系で，自然振動数の分布を一つきめて結合の強さKを大きくしていった時の相互引き込みのようすを示している。結合の強さとともに相互引き込みが進行しているようすがわかる。結合定数が小さい時は，ばらばらに各振動子が振動しているが，結合が強くなるにつれ，同期のクラスターをつくるようになる。1次元系の$\alpha=0$の場合と同様，クラスターの大きさにはある平均的サイズがあって，それが結合の強さとともに増大しているようにみえる。結合をさ

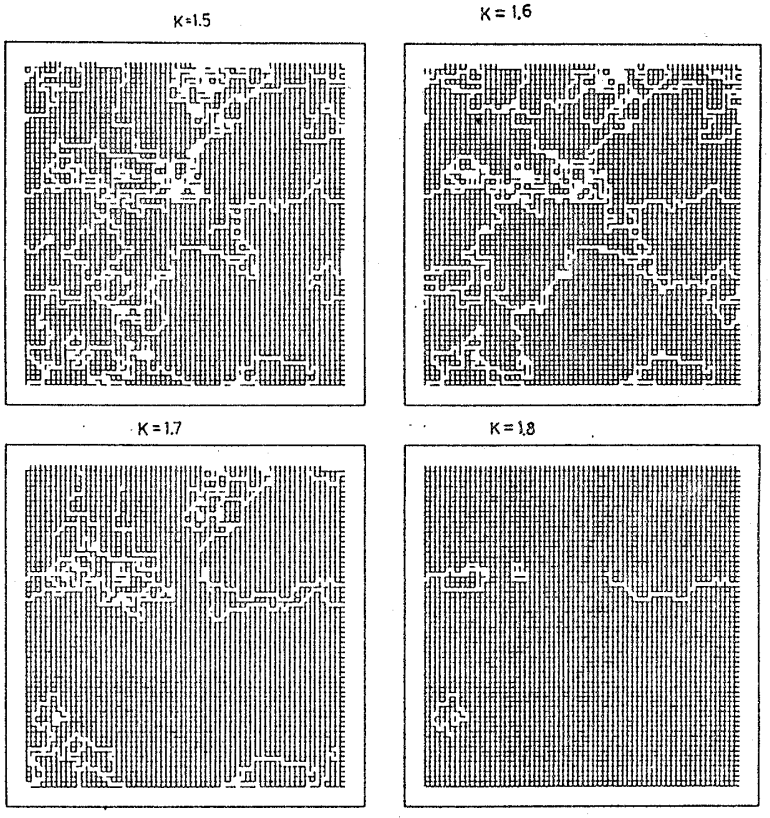


図5.1　2次元振動数パターン

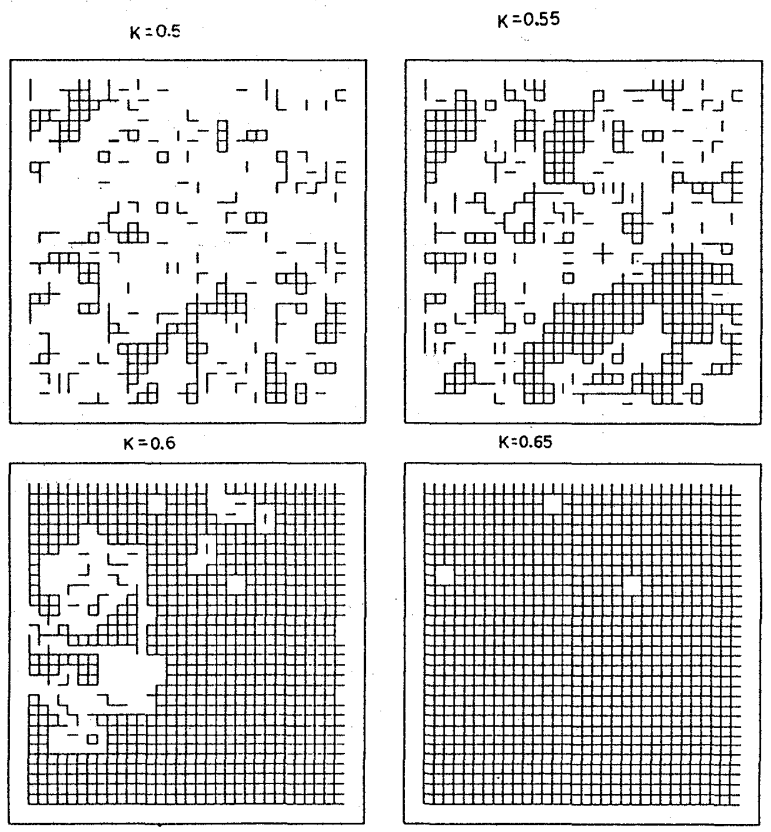


図5.2　3次元振動数パターン

らにつよくすると大きなクラスターが数個共存するようになり，その境界がひびわれ状に見えている。さらに結合をつよくすると，全振動子の同期が生じる。図5.2は3次元系の一断面の相互引き込みのようすを示している。1次元，2次元系の場合とちがって，結合の強さがある程度大きくなると，一つのクラスターが急速に成長して，一つの大きなクラスターと小さなクラスター群に分れる傾向がある。結合をさらに強めると，大きなクラスターがますます大きくなり，系の端から端までつながったパーコレーションクラスターをつくるようになり，さらに結合を強めるとついに全振動子が同期する。1次元系，2次元系では，近接した同期クラスターが結合が強まるにつれ合体し，ひとまわり大きな同期クラスターになる過程をくりかえして，相互引き込みが進行するというイメージがあうように思われる。それに対して，3次元系では各格子点間に独立に確率Pでボンドをつないでクラスターをつくっていくボンドパーコレーションのイメージにいくらか近い。

次に相転移の有無に直接かかわるオーダーパラメータの計算結果を図5.3～5.6に示す。有限サイズの系のシミュレーションを行ない，そのサイズを大きくすることによって無限系のふるまいを予想する。各サイズに関して，自然振動数の異なる6つのサンプルのシミュレーションを行ない，その平均値を図に示した。かなり大きなサイズの系でも，サンプルごとにオーダ

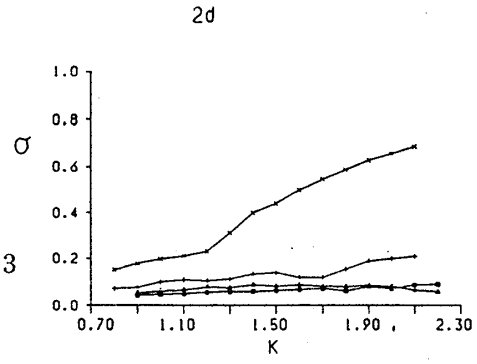
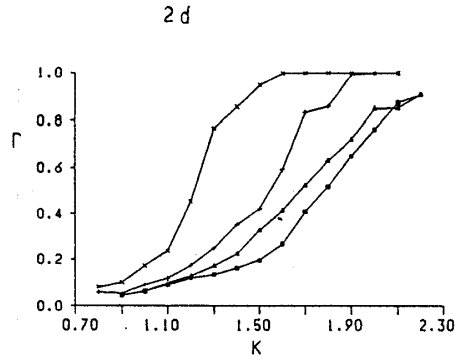


図 5.3



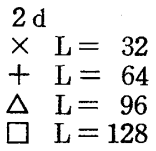


図 5.5

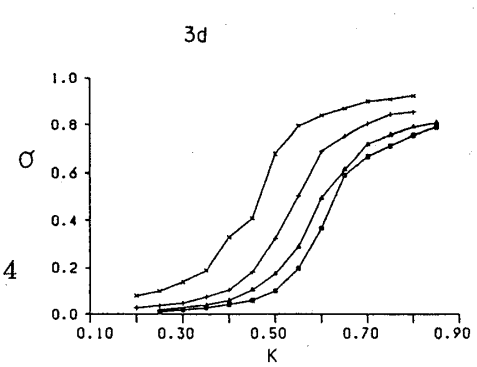
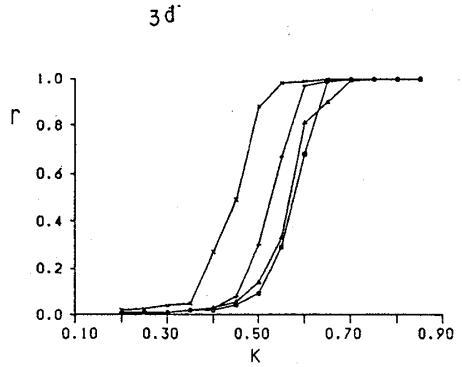


図 5.4



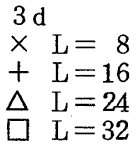


図 5.6

ーパラメーターがばらつく。図 5.3 は 2 次元系のオーダーパラメーター σ の結合定数に対するグラフである。系のサイズが小さい時は K を大きくすると σ は 1 に近づくが，系のサイズとともに急激に σ の値は減少している。図 5.4 は 3 次元系の σ のグラフである。2 次元系の場合に比べるとゆるやかだが，やはりサイズとともに σ は着実に減少している。このことより，位相のオーダーは 2 次元，3 次元では出現しないものと考えられる。図 5.5, 図 5.6 はそれぞれ 2 次元，3 次元の振動数に関するオーダーパラメーター r のグラフである。σ に比べて，サイズ依存性が弱くなっているので，無限系のふるまいを予想するのはむずかしいが，2 次元系ではサイズとともに r が減少しており，3 次元系では r の減少が収束するように見える。振動数パターンのふるまいも考慮にいれると，2 次元では振動数のオーダーは出現しないが，3 次元では振動数のオーダーが出現すると予想される。§ 3 で扱った無限次元モデルでは位相のオーダーパラメーター σ，振動数のオーダーパラメーター r は，ともにある臨界値 K_c 以上で 0 でない値になった。シミュレーションの結果から，r の出現のための lower critical dimension は 3 で σ の出現のための lower critical dimension は 4 より大きいという結論を出した。2 つのオーダーパラメーターに関する lower critical dimension が異なっていることは興味深い。高次元系では，2 つのオーダーパラメーターはともに 0 でない値をとると思われるが，その出現のための臨界結合定数 K_c^{σ}，K_c^{r} が無限次元系のように一致するかどうかはわからない。

図 5.7 に 3 次元系における振動数分布を示す。3 次元系では振動数のオーダーが出現すると

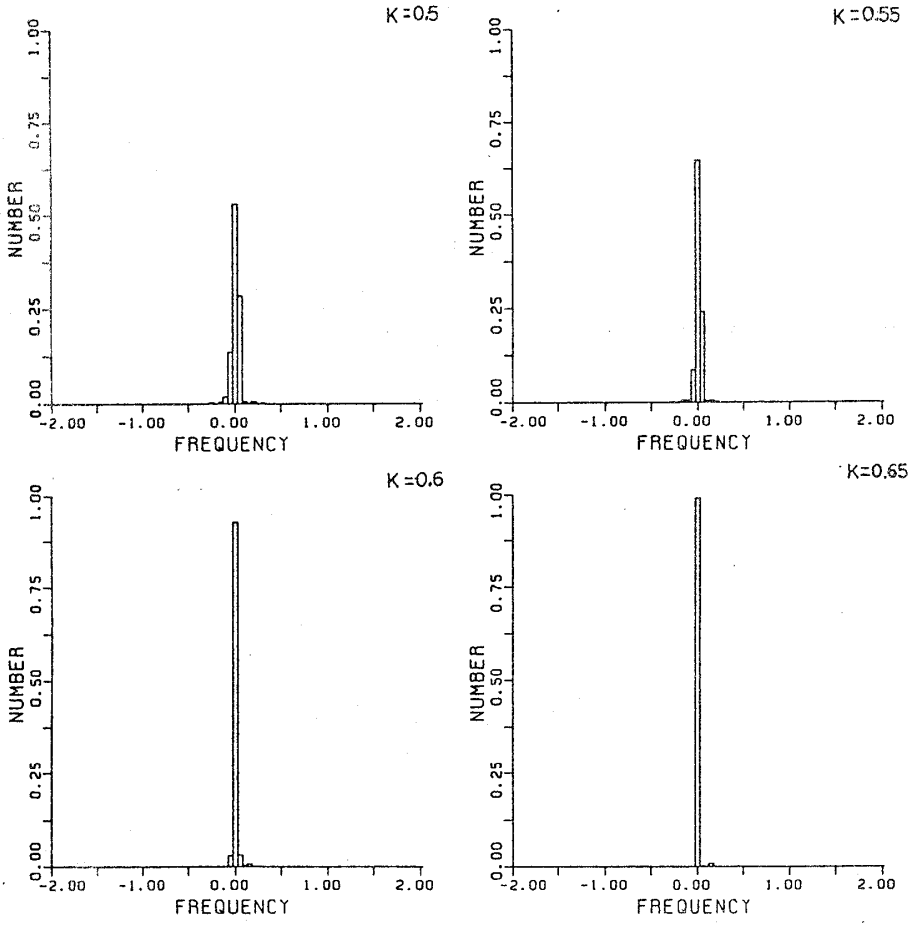


図5.7　3次元振動数分布

思われるが，相互引き込みの起こりかたの違いを反映して，振動数分布の形は無限次元系のものとは明らかに異なっている。無限次元系の場合は，K_c 以下では振動数分布は自然振動数分布と一致し，K_c 以上では δ 関数的ピークとその近傍に分布のくぼみが見られた。3次元系では K_c 以下でも局所的に引き込みが進行するので振動数分布はもとの自然振動数分布の平均値のまわりに集中してくる。K_c 以上ではその平均値に分布は集中するが，その近傍には特にくぼみはみられず単調に分布関数は減少している。

§6　2次元，3次元oscillator lattice とパターン形成

6－1　標的パターンと渦巻きパターン

2次元，3次元oscillator lattice には，Belousov-Zhabotinsky 反応で観察されているようなパターンをつくる能力がある。位相モデル(4.1)式において $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ の場合を主に扱って，パターン形成と引き込みのようすを調べる。

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_i - \sum_j K_{ij} \{ \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha) - \sin\alpha \}$$

$$= \omega_i - \sum_j K_{ij} \cos\alpha \sin(\phi_i - \phi_j) + \sum_j K_{ij} \sin\alpha \{1 - \cos(\phi_i - \phi_j)\} \qquad (6.1)$$

K_{ij} は格子点 j が i の最近接格子点であるときのみ一定値 K をとる。この節では ω_i の分布が単純な場合，即ち全振動子が同等な系と数個の振動子の自然振動数が他のものと異なっている系を扱う。(6.1)式にもとづく計算機シミュレーションをRKG法を使って行なった。ペトリ皿中で進むBelousov-Zhabotinsky反応を模して，自由境界条件を課した。

$$\begin{aligned} &\phi(0, j) = \phi(1, j), \quad \phi(L, j) = \phi(L+1, j) \\ &\phi(j, 0) = \phi(j, 1), \quad \phi(j, L) = \phi(j, L+1) \end{aligned} \qquad (6.2)$$

2次元系のシミュレーションの結果を図で説明する。位相のパターンを表示するため，各振動子の位相が 2π を法として0と π の間にある場合に，その格子点に＋印を描いた。

・標的パターン

中心にある4つの振動子の自然振動数が w で，他の振動子の自然振動数をすべて0とした系のシミュレーションの結果を図6.1に示す。その他のパラメータは $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $K = 1.0$ である。w の値として0.5, 1.0, 1.5, 2.0の4つをえらんだ。すべての振動子の位相をそろえた状態を初

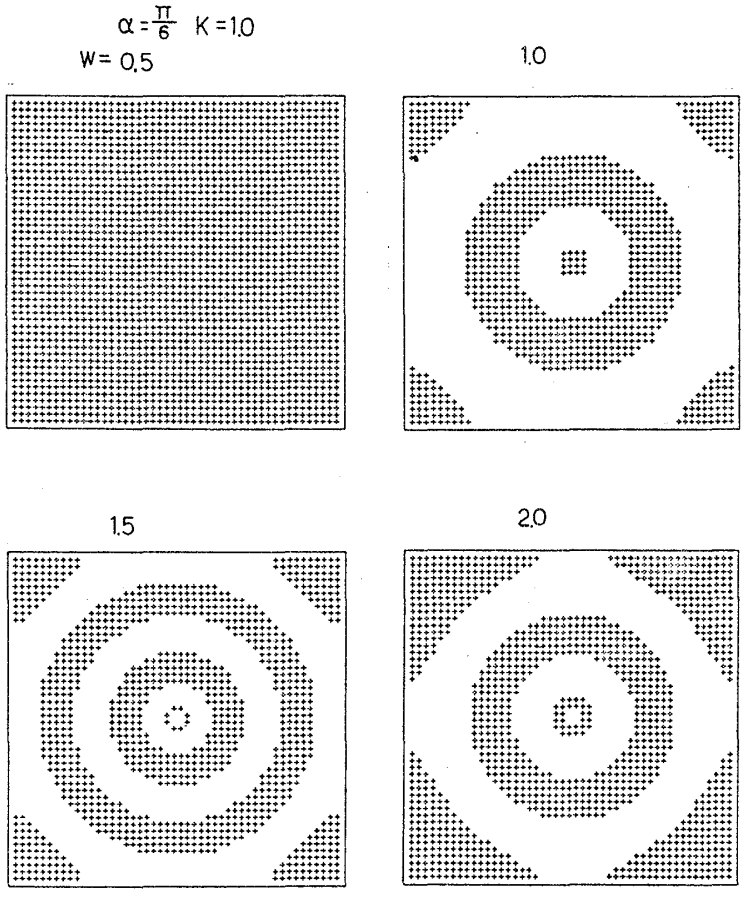


図6.1　標的パターン

期条件とした。$w=0.5$ では特にパターンが見えていない。不純物振動子の自然振動数がバルクの振動子の自然振動数とわずかしか違わない場合は，不純物振動子がバルクの振動に引き込まれて標的パターンを生じない。$w=1.0$ にすると，標的パターンが見えている。標的パターンにおいては，各振動子の位相が同心円の中心からの距離に比例して減少している。この位相勾配によってバルクの振動子の振動数が高まり，不純物振動子の振動数と一致するようになる。不純物振動子がペースメーカーとなり，周囲の振動子を引き込んでいるといえる。§4で述べた1次元系における山形パターンの2次元版が標的パターンである。1次元系では $w>0$ なら山形パターンが生じるが，2次元系では w がある臨界値 w_c 以上でないと標的パターンは生じない。w を大きくすると位相勾配が大きくなり同心円の間隔はせまくなる。$w=1.5$ では，中心の不純物振動子は周囲の振動子を引き込めなくなっている。しかし周囲にはほぼ規則正しく標的パターンを放出している。$w=2.0$ では，中心の不純物振動子はさらに速く振動するので，周囲の振動子への影響は弱くなり，同心円の間隔がかえって広くなっている。

・渦巻きパターン

$\omega_i=0$ の一様な系でも，初期条件をかえると，さまざまなパターンが生じる。初期条件を適当に選んで＋の vortex を一つつくる。例えば，各格子点 (i, j) に対して

$$\phi(i, j)=\tan^{-1}\left(\frac{j-\frac{L}{2}}{i-\frac{L}{2}}\right) \tag{6.3}$$

を初期条件にとると，$\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ に vortex が一つできる。トポロジカル欠隔としての vortex は安定である。つまり＋ vortex と－ vortex のペアで生成・消滅するか，境界から外へ逃げ出さない限り，vortex は存在しつづける。図6.2に（6.3）を初期条件にした場合のシミュレーションの結果を示す。α として，$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ を選んだ。$\alpha=\frac{\pi}{6}$ ではきれいな渦巻きが見られる。渦の中心部では最近接格子間の位相差が大きくなる。特に一番中心部つまりvortex の位置では，

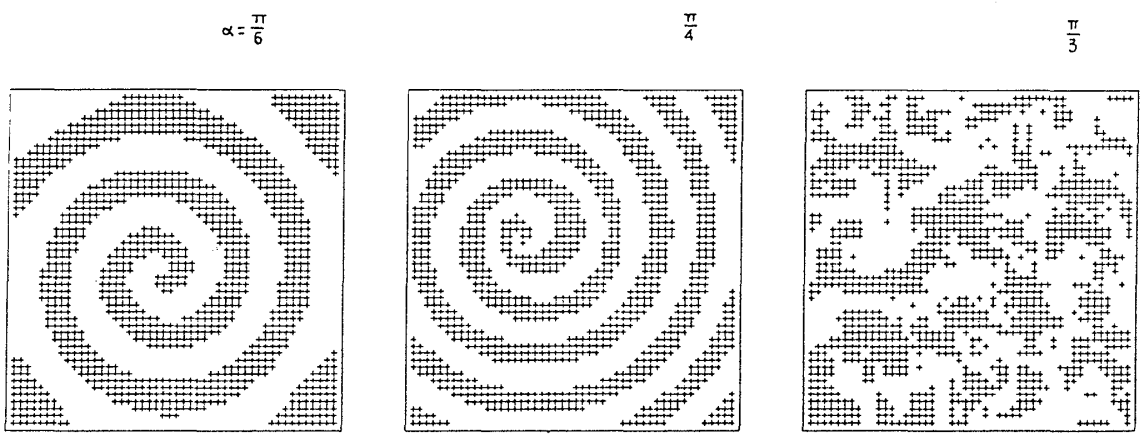


図6.2　渦巻きパターン

位相差は$\frac{\pi}{2}$程度にならざるをえない。$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$なら(6.1)式の$1-\cos(\phi_i-\phi_j)$の項を通じて，位相差が振動数を高める。渦巻きパターンは渦の中心がペースメーカーの役割を果たし，周囲の振動子を引き込んで生じるパターンといえる。αとともに渦巻きの巻き方がきつくなり，ついにある臨界値α_cで渦の中心が周囲と同期できなくなる。$\alpha=\frac{\pi}{4}$ではすでに渦の中心が周囲と同期できなくなっており，渦の中心部分が少し乱れ，vortexの位置が動きまわるようになっている。そのため渦巻きパターンも少しひずんだものになっている。さらにαを大きくすると，vortexのペア生成，ペア消滅が自発的におこるようになる。$\alpha=\frac{\pi}{3}$ではその結果非常に乱れたパターンが生じている。

・スクロールパターン

3次元系のトポロジカルな欠隔はvortex lineである。2次元系において，vortexをペースメーカーにして渦巻きパターンが生じたように，3次元系においては，vortex lineが核となって波動パターンが生じる。初期条件を適当に選んで，vortex ringを用意する。例えば，各格子点(i, j, k)に対して，

$$\begin{cases} \phi(i, j, k)=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\times\left(k-\frac{L}{2}\right) & \frac{L}{2}\leq k\leq\frac{L}{2}+7,\quad \left(i-\frac{L}{2}\right)^2+\left(j-\frac{L}{2}\right)^2\leq r^2 \\ \phi(i, j, k)=0 & \text{その他の } i, j, k \end{cases}$$

を課すと，高さ$\frac{L}{2}+3$の位置に半径rの渦輪が存在する。この初期条件から時間発展させた結果を図6.3に示す。上からみた時の渦輪の投影図と，$j=\frac{L}{2}$での断面の位相パターンを示してある。$\alpha=0$では，渦輪のある高さは元のままで，時間がたつにつれ小さくなってゆき，ついに消滅する。2次元系の場合でもそうだが，$\alpha=0$ではvortexはペースメーカーになりえず位相パターンに巻きこみがみられない。$\alpha=\frac{\pi}{6}$では，渦輪を中心に巻きこみが成長して，スクロール(巻き紙)パターンを生じる。断面の位相パターンには渦巻きの対が見えている。しかし渦輪はだんだん小さくなり，消滅してしまった。渦輪の大きさが小さくなると，渦輪が下方にドリフトする傾向がある。

6－2　渦巻きパターンと引き込みの多安定性

6－1でみたように，vortexがあると，その位置にある振動子の振動数が高まり，それがペースメーカーとなって渦巻きパターンをつくる。トポロジカルな欠陥によって系の状態がかわってしまう。vortexは振動数を実質的にかえる働きがあるので，引き込みにも大きな影響をおよぼす。ω_iが一定の一様な系では，すべての振動子の位相がそろった状態は安定である。渦巻きパターンをつくった状態では位相勾配を生じるが，αが小さい間は互いに同期している。αが

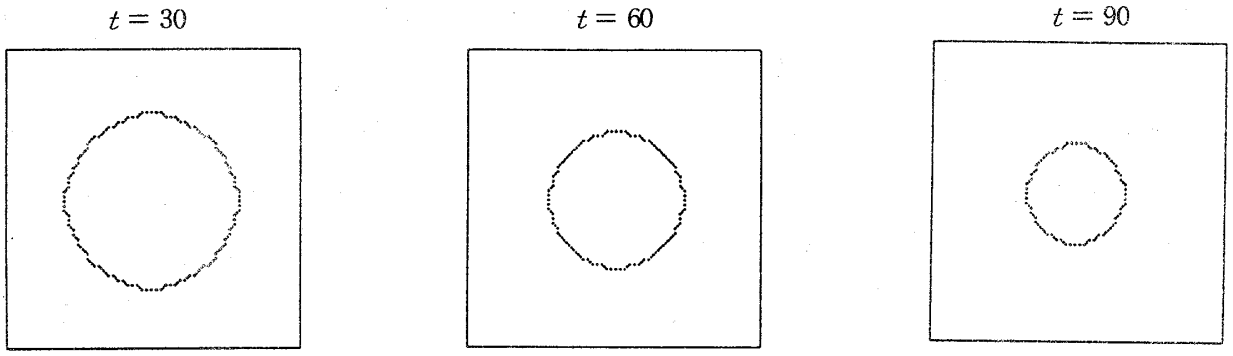


図 6.3.a　渦輪　$\alpha=0$

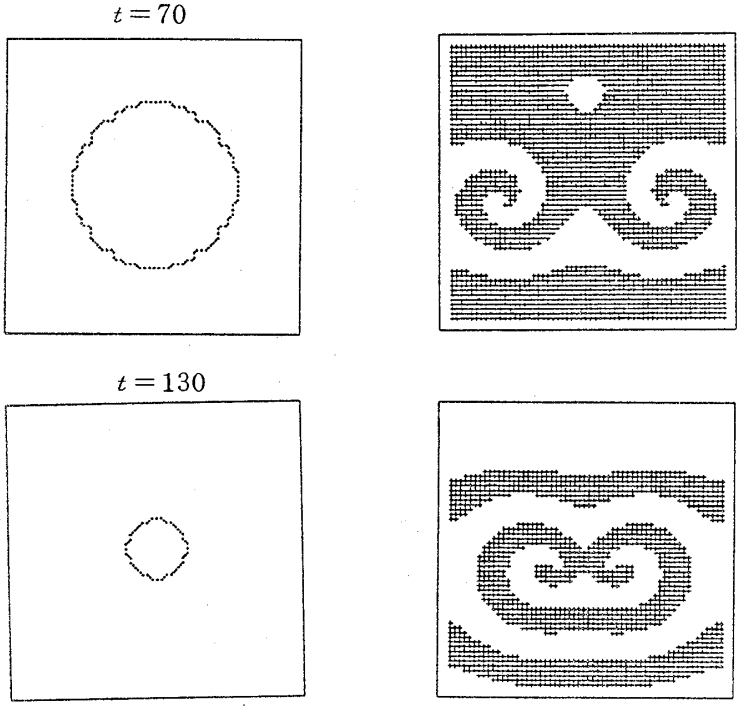


図 6.3.b　スクロールパターン　$\alpha=\frac{\pi}{6}$

大きくなると渦の中心で同期が破れるようになる。

α が小さく，vortex だけでは同期をそこなわない場合でも，自然振動数の非一様性とのかねあいで同期が破れることがある。図 6.4 に $\alpha=\pi/6$ の例を示す。この例では中心から半径 12 の円内の振動子の自然振動数 ω_i が周囲より 0.8 高くなっている。$\phi(i, j)=0$ と $\phi(i, j)=\tan^{-1}\frac{j-\frac{L}{2}}{i-\frac{L}{2}}$ の 2 つの初期条件から出発した時の位相パターンと振動数パターンを示してある。vortex がない場合には，自然振動数の非一様性は半径方向に位相勾配をつくって，つまり標的パターンをつくることによって帳消しにされ，同期が達成されている。しかしここに vortex がはいると，それによる振動数の高まりは，もはや位相勾配では解消できず，同期がやぶれる。その結果，振動数パターンに相互引き込みを示すボンドがきれている所が生じている。

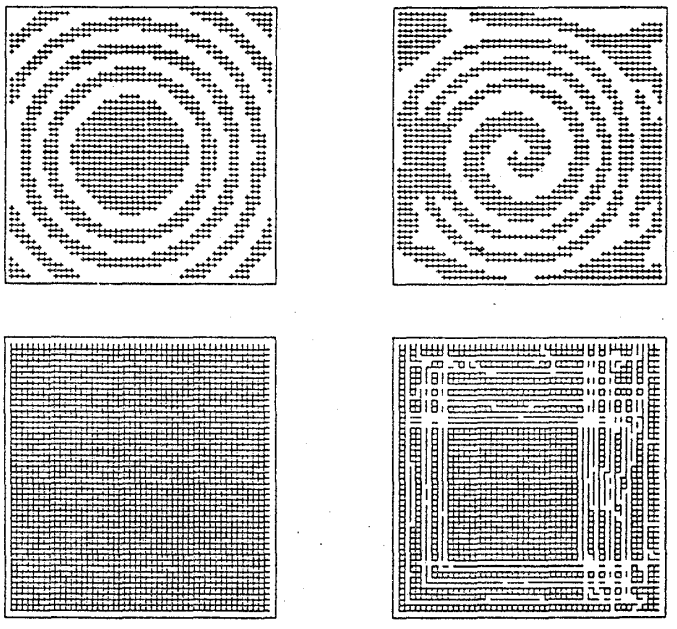


図 6.4　上 位相パターン
下 振動数パターン

逆にある領域の自然振動数が低すぎて，周囲の振動子に同期できないような場合に，vortex の存在によって振動数が増大し，引き込みが可能になることもありうるだろう。

$\alpha=\frac{\pi}{4}$ では渦中心のペースがはやすぎるので，周囲の振動子を引きこむことができず，乱れたパターンを生じた。(図 6.2) 渦中心にある振動子の自然振動数が周囲の振動子のものより低くなっていれば，渦中心のペースが緩和され，渦巻きパターンが安定化することが考えられる。$\alpha=\frac{\pi}{4}$，$K=1.0$ として，渦中心の 4 つの振動子の自然振動数 w を $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ と $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$ に選んだ系のシミュレーションの結果を図 6.5 に示す。$w=-\frac{1}{4}\sqrt{2}$ ではまだ渦巻きパターンは少し乱れているが，渦中心が動きまわることはなくなっている。$w=-\frac{3}{4}\sqrt{2}$ ではきれいな渦巻きパターンが得られ，引きこみが回復したことがわかる。おそい振動子が渦の中心にあるた

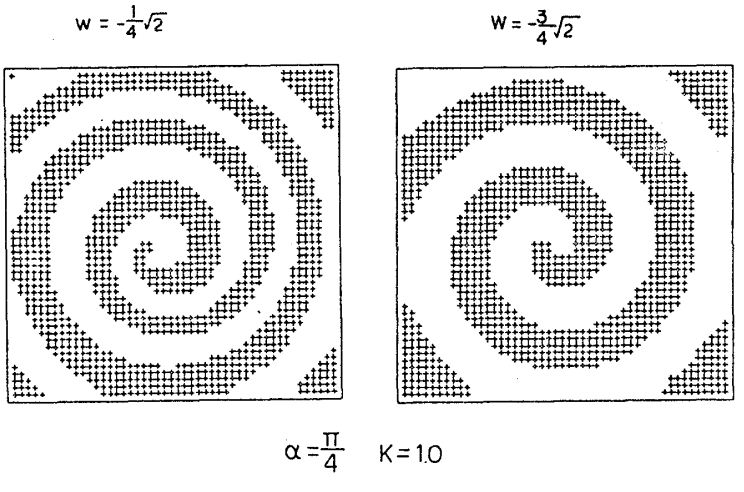


図 6.5　渦とおそい振動子

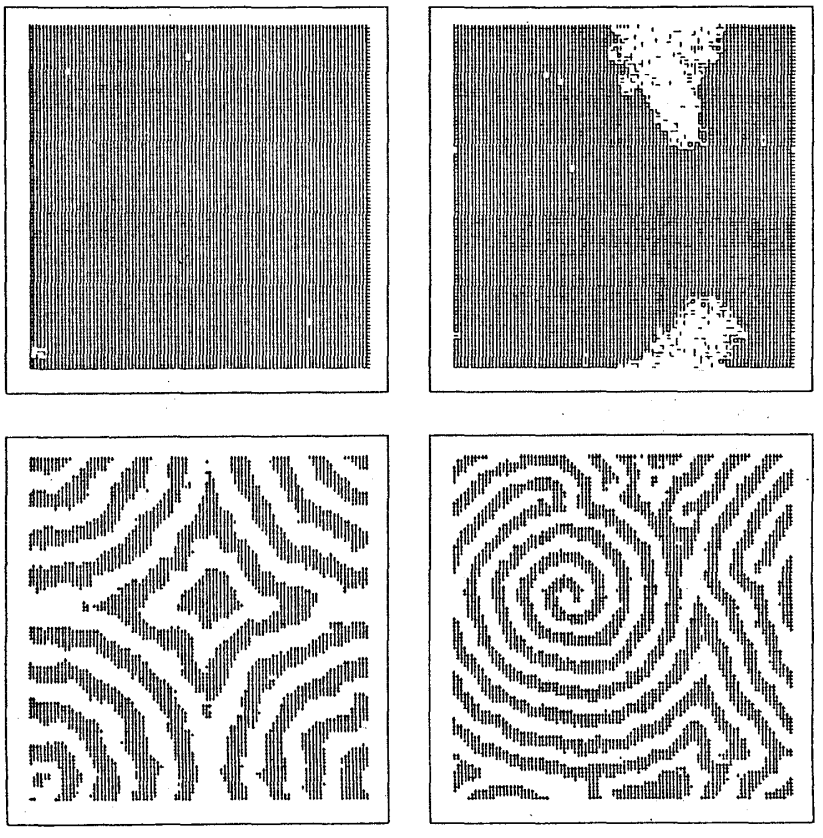


図 6.6　$\alpha=\frac{\pi}{4}$　$K=2.6$
上 振動数パターン
下 位相パターン

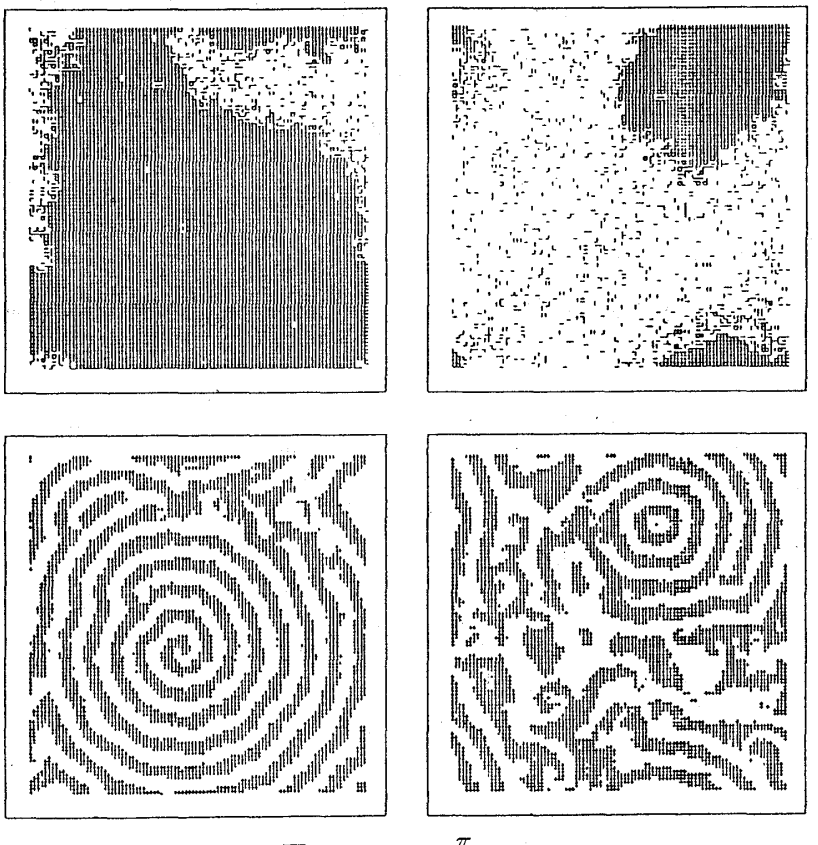


図 6.6　$\alpha=\frac{\pi}{4}$　$K=2.6$

め，引き込みが生じているのだが，もし位置がずれていれば，同期が破れ渦中心は動きまわる。渦中心がうまくおそい振動子の位置にやってきて，引きこみが回復するかどうかは必ずしもわからない。

自然振動数 ω_i がランダムに分布している系で，顕著な引きこみの多安定性がみられた例を図6.6に示す。ω_i を分散1，平均0のガウス乱数で選んだ系で，$\alpha=\frac{\pi}{4}$，$K=2.6$ である。ω_i を固定して，初期条件のみ変えて生じた4つのパターン（振動数パターンと位相パターン）を示してある。振動数パターンを見ればわかるように，同じ系から，ほとんどすべての振動子が同期している状態や，ほとんど同期していない状態が生じている。振動子が互いに同期している領域には，同心円状パターンや渦巻きパターンのような割合ととのった位相パターンが見えている。同期していない領域の位相パターンはかなり乱れている。$\alpha=\frac{\pi}{4}$ なので一様な系では渦巻きパターンは動きまわるが，自然振動数がランダムに分布している系では，動いているうちに適当な場所を見つけて，そこで渦巻きが定常に回転することが可能になる。定常に回転できる場所が何か所もあると，それに対応して安定状態が何こか存在してもよいだろう。

このように，初期条件によって vortex がさまざまな配置をとり，それらが実質的に自然振動数の分布を変化させるような役割をする。その結果，振動子集団の引き込みのようすが変化してしまう。これは $\alpha\neq 0$ の2次元 oscillator lattice 系の面倒だが興味深い特徴の一つといえるだろう。

参考文献

1) A.T. Winfree : *The Geometry of Biological Time*, Biomath. Vol. 8 (Springer)

2) Y. Kuramoto : *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer)

3) ニコリス，プリゴジーヌ：散逸構造（岩波書店）

4) 戸田盛和：振動論（培風館）

5) S. K. Ma : *Modern Theory of Critical Phenomena* (Benjamin)

6) 山口陽子：生物リズムと引き込み
ヒューマンサイエンス3（中山書店）

7) 岡田節人：細胞における協同現象
生物と協同現象（学会出版センター）

8) R.R. ウォード：生物時計の謎（講談社）

9) A.T. Winfree : J. Theor. Biol. **16** (1967) 15

10) Y. Kuramoto : *Lecture Notes in Phys.* Vol. **39**, 420 (Springer)

11) Y. Kuramoto : Prog. Theor. Phys. Suppl. **79** (1984) 223

12) Y. Aizawa : Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 703

13) J. C. Neu : SIAM J. Appl. Math. **37** (1979) 307 ; **38** (1980) 305

14) Y. Yamaguchi, K. Kometani and H. Shimizu : J. Stat. Phys. **26** (1981) 719

15) Y. Yamaguchi and H. Shimizu : Physica **110** (1984) 212

16) G.B. Ermentrout : J. Math. Biol. **22** (1985) 1

17) H. Daido : Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 1460

18) H. Sakaguchi and Y. Kuramoto : Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 576

19) Y. Kuramoto : Physica **106A** (1981) 128

20) S. Shinomoto and Y. Kuramoto : Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 1105 ; **75** (1986) 1319

21) G.B. Ermentrout and N. Kopell : SIAM J. Anal. **15** (1984) 21

22) Y. Kuramoto and T. Yamada : Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 724

23) T. Yamada and Y. Kuramoto : Prog. Theor. Phys. **55** (1976) 2035

24) A.T. Winfree : Science **181** (1973) 937 ; Sci. Amer. **230** (1974) 82

25) Y. Kuramoto and S. Koga : Prog. Theor. Phys. **66** (1981) 1081