物性研究 49－3（1987－12）

講義ノート

動的縮約の構造

京大・理　蔵　本　由　紀

（1987年11月6日受理）

§0. はじめに

上題での蔵本由紀教授による講義が，研究室のセミナーとして，2回に亘って行なわれた。以下でその内容を簡単に紹介する。

ある力学系の発展方程式の解を求める以前に，その方程式自体を何らかの手法でより単純化し，系の従うダイナミクスを抽出できないだろうか，という動的縮約の発想は歴史的にも古く従来よりいくつかの代表的方法が知られている。ここで，それらに共通する一般的な理論的構造があることを提示し，統一的観点より見直してみよう。まず第Ⅰ部の5節で具体的な4例として，(i)非線型振動における漸近的方法[1)] (ii)分岐理論的縮約法[2)] (iii) Chapman-Enskogの方法[3)] (iv) Phasedynamics[4)]を順次取り上げ，共通の構造を認識した上で，第Ⅱ部ではこのうちのphasedynamicsに的を絞る。前半4節で今までの結果を紹介した後，終りの2節で，同じ枠組みでより広範な対象を取り扱いうることを示すべく，新たな2つの適用例を報告する。

Part Ⅰ. 動的縮約法

§1. 簡単な2変数モデル

4つの例に先立って，最も単純化した形ながら本質的な構造を見ることができる，次のような2変数の常微分方程式系を考えよう。

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon f(x, y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\gamma y + g(x) \end{aligned}\right. \tag{1・1}$$

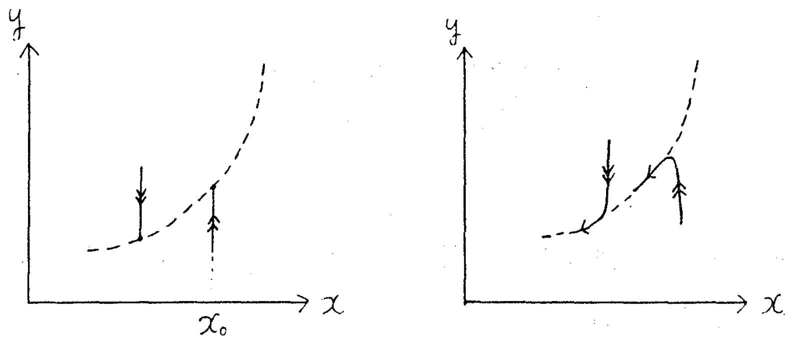
ε：微小パラメータ

KURAMOTO Yoshiki
記録：京大・理　西川郁子（本稿作成にあたっては蔵本先生に御一読頂きました。）

ここで$t \to \infty$における解の漸近的挙動に注目するとき，摂動項をもつこの系をどのように動的縮約することが考えられるだろうか。

まず，非摂動系はアトラクターとして

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0(x_0) = \gamma^{-1} g(x_0) \end{cases} \tag{1・2}$$



(a) 非摂動系　　(b) 摂動系

Fig. 1

という任意パラメータx_0を含む固定点をもつ。直ちにわかるのは，例えば解$x(t)$，$y(t)$自身をこの周りで摂動展開すると，最低次$O(\varepsilon^1)$で

$$x(t) \simeq x_0 + \varepsilon f(x_0,\ y_0(x_0)) \cdot t \tag{1・3}$$

となり永年項が出現する。これに対して，いわゆる断熱消去法では，摂動を受けたxが遅い変数であることに着目することで

$$\begin{cases} y(x) = \gamma^{-1} g(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon f(x,\ \gamma^{-1} g(x)) \end{cases} \tag{1・4}$$

という縮約を行う。これは最低次での正しい近似だが，任意の次数での摂動展開へ拡張するには，以下の２点に注意してより系統的に摂動展開を行うことが必要となる。先に解の展開ができなかったのは，非摂動系での$x(t)$が中立安定であり，摂動の結果生じるズレは最早微小に留まり得ないからである。だが$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$は微小であり，これが展開できる量である。一方遅くない$y(t)$は，各時刻での準定常解$y(t) = \gamma^{-1} g(x(t))$の周りで展開してかまわない。これが第１点である。第２は，時間依存性は全て遅い変数$x(t)$を介してのみ生じる，というfunctional ansatzを置くことだ。これは，摂動が微小である限り解軌道が$t \to \infty$で漸近するslow manifoldが存在し，我々はこの上での運動にのみ注目することを意味する。これらにより

$$\begin{cases} y(x) = y_0(x) + \rho(x) \\ \dfrac{dx}{dt} = v(x) \end{cases} \tag{1・5}$$

$$\rho(x) = \varepsilon\rho_1(x) + \varepsilon^2\rho_2(x) + \cdots$$

$$v(x) = \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \cdots$$

という形で展開することになる。この最低次が断熱消去法に他ならず，より高次で非断熱効果を摂動的に取り込んでゆける。例えばこの次の次数では，

$$\begin{cases} y_1(x) = -\gamma^{-1} f(x, y_0(x)) \dfrac{dy_0(x)}{dx} \\ v_2(x) = y_1(x) \dfrac{\partial f(x, y_0(x))}{\partial y_0} \end{cases} \tag{1・6}$$

以下順次，前の次数までの結果を代入することで slow manifold $y(x)$及びその上での$x(t)$の運動を記述する方程式を任意の精度まで遂次求めてゆける。このように，任意定数をとる中立モードであった変数xは，一旦摂動を受けるとそれがいかに小さくとも回復力がないためにゆっくりと滑り始める。これが先の永年性の由来であり，実際には永年性をxの時間変化に取り込むことで，正にxのダイナミクスが決定される。

以上は簡単な例ではあるが，動的縮約を行うためには非摂動系に中立モードの存在が必要であること，slow manifold に拠る functional ansatz を置くと遅い変数で閉じた方程式系に縮約できること，そして実際にダイナミクスは永年性の消去から決定されること，といった理論の基本的構造は既に見出される。この認識に立って，以下で順次4つの方法を見ていこう。

§2 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky の方法

調和振動子に対して摂動が加えられた次の系：

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right) \tag{2・1}$$

で表わされる非線型振動を考える。この場合も非摂動系の解：

$$u_0(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2・2}$$

は，振幅と初期位相という2つの任意パラメータa，ϕを持っており，これらが摂動の結果遅い

変数となる。そこで2変数 $a(t)$, $\phi(t) \equiv \omega_0 t + \varphi(t)$ に対して次の方程式系を考えることになる。

$$\begin{cases} u(a(t), \phi(t)) = u_0(a, \phi) + \rho(a, \phi) \\ \dfrac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \Omega(a) \\ \dfrac{da}{dt} = A(a) \end{cases} \tag{2・3}$$

$$\rho(a, \phi) = \varepsilon \rho_1(a, \phi) + \varepsilon^2 \rho_2(a, \phi) + \cdots$$

$$\Omega(a) = \varepsilon \omega_1(a, \phi) + \varepsilon^2 \omega_2(a, \phi) + \cdots$$

$$A(a) = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots$$

微小量 ρ, Ω, A をいずれも ε^1 で展開したのは，以下で導出する最低次方程式において，各微小量が釣り合うよう考慮したためである。また一般には ϕ 依存性をもつ Ω, A は，この場合 a のみの汎関数として求められる。ここで slow manifold $u(a, \phi)$ は，$a(t)$, $\phi(t)$ を介して時間変化する第一項 u_0，及びそれからのズレ ρ で表すことになる。この例では2つの中立モードに応じて2変数を過剰に導入していることを，先のモデルになかった点として特に注意しておかねばならない。そのため，係数の決定には任意性が残る。これは manifold の微小なズレの基準振動成分を u_0 或いは ρ のどちらに含めるか，という表記上の問題に過ぎない。しかし予め何らかの規約を定めて一意に分離しておく必要がある。ここでは，$\rho_\nu(a, \phi)$, $\forall \nu \geq 1$ は基準振動成分を含まない，と決めておこう。振幅 a で任意次数での補正を考慮したため，これらは第一項に含みうる。このような分離法の任意性は一般に生じることであり，先の系では1つの変数自身が中立モードだったので余分に変数を導入する必要がなかったに過ぎない。

これらをもとの(2・1)式に代入し，

$$\begin{aligned} &\left\{\left[(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots)\frac{\partial}{\partial a} + (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \cdots)\frac{\partial}{\partial \phi}\right]^2 + \omega_0^2\right\} \\ &\qquad \times (a \cos\phi + \varepsilon \rho_1 + \cdots) \\ &= \varepsilon f(a \cos\phi + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \cdots, \ -\omega_0 a \sin\phi + \cdots) \end{aligned} \tag{2・4}$$

が得られる。最低次の場合で実際に ω_1, A_1, ρ_1 を求める手順を追ってみよう。ε^1 の項を両辺で等置すると，

$$L\rho_1(a, \phi) = B_1(a, \phi; \omega_1, A_1) \tag{2・5},$$

ただし $L \equiv \omega_0^2 (\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} + 1)$,

$$B_1(a, \phi; \omega_1, A_1) = f(a\cos\phi, -\omega_0 a \sin\phi) + 2\omega_0 A_1 \sin\phi + 2\omega_0\omega_1 a \cos\phi \tag{2・6}$$

L は非摂動系をその定常振動解 u_0 の周りで線型化して得られる，線型整次演算子である。いま基準振動 u_0，$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\phi}$ は L の 0 固有関数であることより，(2・5) に対する可解条件として，

$$\begin{aligned} &(u_0(\phi), B_1(a, \phi; \omega_1, A_1)) = 0 \\ &(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\phi}(\phi), B_1(a, \phi; \omega_1, A_1)) = 0 \end{aligned} \tag{2・7}$$

が課せられる。ここで内積は次で定義する；

$$(f(\phi), g(\phi)) \equiv \int_0^{2\pi} f(\phi) g(\phi) \mathrm{d}\phi \tag{2・8}$$

(2・7) の可解条件は，B_1 が基準振動成分 $\sin\phi$，$\cos\phi$ を含まないことを意味するがこれで $\omega_1(a)$ $A_1(a)$ が与えられ，即ち a，ϕ に対する最低次の運動方程式を決定する。特に保存系の場合には，任意次数で $A \equiv 0$ となり依然 a は任意パラメータとして残ることになる。次に，それを(2・5)式に代入して得られる

$$L\rho_1(a, \phi) = B_1(a, \phi) \tag{2・5$'$}$$

を解いて，$\rho_1(a, \phi)$ が求められる。ただし $\rho_1(a, \phi)$ の基準振動成分のみは不定だが，それが前述の分離の任意性に他ならず，ここでは含まれないものと決めておいた。これを如何に設定しても次の次数で運動方程式に影響するために，逆に遅い変数の運動に跳ね返り，結局 $u(t)$ は任意の次数で一意的に得られる。

以下この手順を逐次任意の次数 ε^ν まで進めることができる。まず，

$$L\rho_\nu(a, \phi) = B_\nu(a, \phi; \omega_\nu, A_\nu) \tag{2・9}$$

に対する可解条件；

$$(u_0, B_\nu) = (\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\phi}, B_\nu) = 0 \tag{2・10}$$

が，$\omega_\nu(a)$，$A_\nu(a)$ を与える。ここで $\kappa \leq \nu - 1$ に対する ω_κ，A_κ，ρ_κ が B_ν の関数形を決めている。次に，

$$L\rho_\nu(a,\ \phi)=B_\nu(a,\ \phi) \tag{2・11}$$

を解いて ε^ν 次の近次で manifold が求まるわけである。

この例では縮約された方程式系もやはり a, ϕ の2自由度であり，もとの u, $\dfrac{du}{dt}$ に比べて逓減されてはいない。これは非摂動系が調和振動を行い，アトラクターまでの trangency がないことの反映である。しかし，非断熱効果を摂動的に取り込む形で運動方程式を簡略化することにより，やはりダイナミクスは縮約されたと考えられる。

§ 3　分岐理論に基づく縮約

§§ 3－1.　Hopf 分岐

次に，分岐点近傍であることを利用した例を取上げよう。具体的には Hopf 分岐直後の状況；

$$\left(\frac{d}{dt}-L_0\right)\vec{x}=\varepsilon L_1\vec{x}+M:\vec{x}\vec{x}+N:\vec{x}\vec{x}\vec{x} \tag{3・1}$$

$\varepsilon\ (>0)$；微小パラメータ

を考える。ここで ε は分岐点からの距離であり，残り2項の非線型性とともにこの場合に中立モードを動かす摂動として働く。一般に n 次元の力学系とし，$L_{0,1}$, M, N はそれぞれ1, 2, 3階のテンソルである。更に，L_0 の正規 (右) 固有関数系を $\{\vec{u}_\nu\}_\nu$ とおこう。即ち，

$$L_0\vec{u}_\nu=\lambda_\nu\vec{u}_\nu,\quad (\vec{u}_\nu^{+},\ \vec{u}_\nu)=1\quad \text{for}\ {}^\forall\nu \tag{3・2a}$$

分岐点 $\varepsilon=0$ でこのうち一対の固有値 λ_0, λ_0^* が虚軸を横切り，

$$\lambda_0=i\omega_0,\quad \lambda_0^*=-i\omega_0$$
$$\mathrm{Re}\,\lambda_\nu<0\qquad \text{for}\quad {}^\forall\nu\neq 0 \tag{3・2b}$$

が満たされているとする。

このとき，非摂動系；

$$\left(\frac{d}{dt}-L_0\right)\vec{x}=0 \tag{3・3}$$

は中立安定周期解；

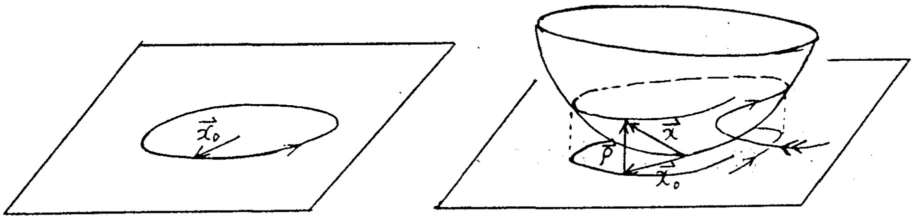
$$\vec{x}_0(t)=W e^{i\omega_0 t}\vec{u}_0+W^* e^{-i\omega_0 t}\vec{u}_0^*$$

$$= \widetilde{W}\vec{u}_0 + \widetilde{W}^*\vec{u}_0^* \qquad (3\cdot4)$$

W; 任意パラメータ

$$\widetilde{W} \equiv W e^{i\omega_0 t}$$

を持つが，この臨界モード $\vec{u}_0$，$\vec{u}_0^*$ が摂動を受けて動き出すこの系の中立モードである。



(a) 非摂動系　　(b) 摂動系

Fig. 2

以後の手順は先と全く同様に進めればよい。つまり遅い変数 $W(t)$, $W^*(t)$ に対して

$$\begin{cases} \vec{x}(\widetilde{W}(t), \widetilde{W}^*(t)) = \vec{x}_0(\widetilde{W}, \widetilde{W}^*) + \vec{\rho}(\widetilde{W}, \widetilde{W}^*) \\ \dfrac{dW}{dt} = A(\widetilde{W}(t), \widetilde{W}^*(t)) \end{cases} \qquad (3\cdot5)$$

と置く。ここでは最低次の方程式で各微小量がちょうど釣り合う場合を考え，そのとき各々が ε の何次であるかは得られる方程式から学ぶことにしよう。

中立モードである W，つまり非摂動系振動面内の基準振動成分の複素振幅，を $\vec{\rho}$ に加えて独立変数として導入したために，変数が2つ過剰になりここでもやはり分離の不定性が生じる。そこで，

$$\vec{\rho}(\widetilde{W}(t), \widetilde{W}^*(t)) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \vec{\rho}^{(l)}(W(t), W^*(t))\, e^{il\omega_0 t}$$

に対して

$$(\vec{u}_0, \vec{\rho}^{(1)}) = 0 \qquad (3\cdot6)$$

を課しておく。ただ先と異なり n 次元なので，$\vec{\rho}$ が基準振動成分を含まないという条件は面内成分にのみ課されているのである。斯して，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right)\vec{\rho}(\widetilde{W}, \widetilde{W}^*) = \vec{B}(\widetilde{W}, \widetilde{W}^*)$$

$$\equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} \vec{B}^{(l)}(W, W^*)\, e^{il\omega_0 t}$$

ただし $\overrightarrow{B}(\widetilde{W}, \widetilde{W}^*) = -\dot{W} e^{i\omega_0 t} \overrightarrow{u_0} - \dot{W}^* e^{-i\omega_0 t} \overrightarrow{u_0}^*$

$$+ \varepsilon L_1 \overrightarrow{x_0} + M : \overrightarrow{x_0}\overrightarrow{x_0} + 2M : \overrightarrow{x_0}\overrightarrow{\rho} + N : \overrightarrow{x_0}\overrightarrow{x_0}\overrightarrow{x_0}$$

$$-\left(\dot{W}\frac{\partial}{\partial W} + \dot{W}^*\frac{\partial}{\partial W^*}\right)\overrightarrow{\rho} + \varepsilon L_1 \overrightarrow{\rho} + M : \overrightarrow{\rho}\overrightarrow{\rho} + 3N : \overrightarrow{x_0}\overrightarrow{x_0}\rho$$

$$+ 3N : \overrightarrow{x_0}\overrightarrow{\rho}\overrightarrow{\rho} + N : \overrightarrow{\rho}\overrightarrow{\rho}\overrightarrow{\rho} \qquad (3\cdot 7)$$

より，

$$(\mathrm{i}\,l\,\omega_0 - L_0)\overrightarrow{\rho}^{(l)}(W, W^*) = \overrightarrow{B}^{(l)}(W, W^*) \qquad (3\cdot 8)$$

を得る。このうち $l = 1$ の基準振動成分に対して可解条件が課され，

$$(\overrightarrow{u_0}^+, \overrightarrow{B}^{(1)}(W, W^*)) = 0 \qquad (3\cdot 9)$$

となる。$\overrightarrow{\rho}$, A に関する最低次の近似では，

$$\overrightarrow{B}^{(1)}(W, W^*) \simeq -\dot{W}\overrightarrow{u_0} + \varepsilon L_1 W \overrightarrow{u_0}$$

$$+ 2M : (W\overrightarrow{u_0}\overrightarrow{\rho}^{(0)} + W^*\overrightarrow{u_0}^*\overrightarrow{\rho}^{(2)}) + 3|W|^2 W N : \overrightarrow{u_0}\,\overrightarrow{u_0}\,\overrightarrow{u_0}^* \qquad (3\cdot 10)$$

であるが，これに $l = 0$，2 に対する(3・8)式より得られる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\rho}^{(0)} &\simeq -|W|^2 2 L_0^{-1} M : \overrightarrow{u_0}\,\overrightarrow{u_0}^* \\ \overrightarrow{\rho}^{(2)} &\simeq W^2 (2\mathrm{i}\,\omega_0 - L_0)^{-1} M : \overrightarrow{u_0}\,\overrightarrow{u_0} \end{aligned} \qquad (3\cdot 11)$$

を代入して，

$$\overrightarrow{B}^{(1)}(W, W^*) \simeq -\dot{W}\,\overrightarrow{u_0} + \varepsilon L_1 W \overrightarrow{u_0}$$

$$+ |W|^2 W \{ -4M : \overrightarrow{u_0} L_0^{-1} M : \overrightarrow{u_0}\overrightarrow{u_0}^* + 2M : \overrightarrow{u_0}^* (2\mathrm{i}\,\omega_0 - L_0)^{-1} M : \overrightarrow{u_0}\overrightarrow{u_0}$$

$$+ 3N : \overrightarrow{u_0}\,\overrightarrow{u_0}\,\overrightarrow{u_0}^* \} \qquad (3\cdot 12)$$

と書き下すことができる。ここで微小量 $\overrightarrow{\rho}^{(0,2)}$ に代わって，$O(\rho^{1/2})$ であることがわかった W, W^* を用いた。これより次の最低次運動方程式；

$$\dot{W} = \varepsilon\sigma W - g|W|^2 W \qquad (3\cdot 13)$$

ただし　$\sigma = (\vec{u}_0^{+},\ L_1 \vec{u}_0)$

$$g = (\vec{u}_0^{+}, [-3N : \vec{u}_0 \vec{u}_0 \vec{u}_0^{*} + 4M : \vec{u}_0 L_0^{-1} M : \vec{u}_0 \vec{u}_0^{*} - 2M : \vec{u}_0^{*} (2i\omega_0 - L_0)^{-1} M : \vec{u}_0 \vec{u}_0])$$

が得られる。各項が釣り合うのは$W = O(\varepsilon^{1/2})$の場合である。

このように，slow manifold（特にこの場合はcenter manifoldと呼ばれる）は摂動の結果もとの振動面より微小に歪んだ放物面となる。そこへ解が漸近した後は，臨界モード以外は事実上減衰し，それ故ダイナミクスは自由度がnから2へと逓減されるわけである。

§§3－2.　Newell-Whiteheadの方法

空間的に非一様な系がHopf分岐を起こす状況は，前小節で扱った(3・1)式に拡散項を付加した次の反応拡散方程式で記述することができる；

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right)\vec{x} = \varepsilon L_1 \vec{x} + M : \vec{x}\vec{x} + N : \vec{x}\vec{x}\vec{x} + D\nabla^2 \vec{x} \qquad (3\cdot 14)$$

ここでDは拡散係数を与えるn次元対角行列である。これはNewell-Whiteheadによるものだが，状態変数の空間変調が長波長の場合には，拡散も摂動として全く同様に扱えるわけである。即ち，緩やかな空間依存性を持った遅い変数W, W^*を考え，同時に微小量$\vec{\rho}$，Aは$\widetilde{W}$, $\widetilde{W}^*$のみならず，その任意の空間微分$\nabla\widetilde{W}$, $\nabla\widetilde{W}^*$, $\nabla^2\widetilde{W}$, $\nabla^2\widetilde{W}^*$, … なる局所量の汎関数とする。このとき，(3・14)式は形式的に(3・1)式のεL_1を$\varepsilon L_1 + D\nabla^2$で置換したものであることに対応して，運動方程式も(3・13)式の$\varepsilon\sigma$を$\varepsilon\sigma + \widehat{D}\nabla^2$に置換えた式：

$$\dot{W} = \varepsilon\sigma W - g|W|^2 W + \widehat{D}\nabla^2 W \qquad (3\cdot 15)$$

ただし　$\widehat{D} = (\vec{u}_0^{+},\ D\vec{u}_0)$

が得られる。

§4　Chapmann-Enskogの理論

以上2，3の例による説明を通して，縮約の構造が明確になったかと思うが，これはまた歴史的に最も古い縮約理論であるChapmann-Enskogの方法にも当てはまる。Boltzmann方程式より流体方程式を導出するこの方法では，衝突に際して保存される粒子数・運動量・エネルギーの計5個の恒量各々が中立モードであり，その緩やかな時空間変化を記述するものが流体方程式なのである。

蔵本　由紀

速度分布関数 $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$ に対して，Boltzmann方程式；

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \mathscr{D} f = J(f) \tag{4・1}$$

を考える。ここで$\mathscr{D} f$，$J(f)$ は各々ドリフト項，衝突項であり

$$\mathscr{D} f = (\vec{c} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial}{\partial \vec{c}}) f$$

$$J(f) = \iint \{ f(\vec{c}') f(\vec{c}_1') - f(\vec{c}) f(\vec{c}_1) \} | \vec{c} - \vec{c}_1 | \sigma'(|\vec{c} - \vec{c}_1|) \, d\Omega \, d\vec{c}_1 \tag{4・2}$$

で与えられる。f の空間変化が緩やかで且つ外力 $\vec{F}$ が小さい場合には，$\mathscr{D} f$ を摂動として扱うことができる。

まず非摂動系では，平衡解 Maxwellian；

$$f_0(\vec{c};\, n, \vec{v}, T) = n \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\vec{c} - \vec{v})^2}{2kT}\right] \tag{4・3}$$

が達成されているとしよう。これは5個の任意パラメータとして，平均粒子数密度 n，平均速度 $\vec{v}$，温度 T を持つ；

$$n = \int f_0 \, d\vec{c}, \qquad m\vec{v} = m \int \vec{c} f_0 \, d\vec{c}, \qquad \frac{3}{2} kT = \frac{m}{2} \int |\vec{c}|^2 f_0 \, d\vec{c} \tag{4・4}$$

これらが摂動により緩慢な時空間依存性をもつ5個の変数となり，その汎関数として速度分布関数 $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$ を求めることができる。

$$f(\vec{r}, \vec{c}, t) = f_0(\vec{c};\, n, \vec{v}, T) + f_0 \times \phi(\vec{c};\, \vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \Omega_1(\vec{r}, t), \quad \frac{\partial U_{x,y,z}}{\partial t} = \Omega_{2,3,4}(\vec{r}, t), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \Omega_5(\vec{r}, t) \tag{4・5}$$

ここで微小量 ϕ，Ω_i $(i = 1, 2, \cdots, 5)$ は何れも，n，$\vec{v}$，T 及びその任意の空間微分 $\partial_x n$，$\partial_x \vec{v}$，$\partial_x T$，$\partial_y n$，$\cdots$ の汎関数とする。

分離の仕方はどのように要請してもよいが，前例までの如くまずは中立モードを基底にもつ直交関数系で考えるのが最も便利であろう。そこで，線型積分演算子 $\mathscr{L} \equiv \left.\frac{\delta J}{\delta f}\right|_{f=f_0} \cdot f_0$ を定義すると，非摂動系で

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f_0 - \mathscr{L}\right) \phi = 0 \tag{4・6}$$。

明らかに $\mathscr{L}$ は，5個の任意パラメータに対応した0固有関数を持つが，各々が衝突における保

存量である；

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_{2,3,4} = mc_{x,y,z}, \quad \phi_5 = \frac{1}{2} mc^2 \qquad (4\cdot7)。$$

これを用いて

$$\int \phi_i (f_0 \phi) \, d\vec{c} = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, 5 \qquad (4\cdot8)$$

を要請しておく。即ち，粒子数等の変化は Maxwellian f_0 で吸収するわけだ。

Boltzmann 方程式(4・1)或いは

$$\mathscr{L}\phi = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathscr{D} f + (\phi \text{ の2次の項}) \qquad (4\cdot1)'$$

に対する可解条件は,

$$\int \phi_i \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathscr{D} f\right) d\vec{c} = 0 \qquad (4\cdot9)$$

である。流体方程式には寄与しない衝突の非線型項はここで省いた。これを具体的に書き下して流体方程式を得るが，まず最低次では

$$\int \phi_i \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathscr{D} f_0\right) d\vec{c} = 0 \qquad (4\cdot10)$$

となり Euler 方程式を与える。散逸項の導出には，局所平衡からのズレを考慮したその次の近似が必要である。そこで(4・1)′式で $f = f_0$ として得られる ϕ を用い，展開形(4・5)を(4・9)式へ代入すると，Navier-Stokes 方程式が得られることになる。

§5 Phasedynamics

本節では，phasedynamics として用いられる手法を前節までと同じ表式で簡単に示し，続く各節への準備としよう。

一般の反応拡散方程式に従う一次元無限系を考える；

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{X} = \vec{F}(\vec{X}) + D\partial_x^2 \vec{X} \qquad (5\cdot1)$$

これが定常解として空間周期解 $\vec{X}_0(x+\lambda) = \vec{X}_0(x)$を持っていたとしよう。何らかの摂動によってこの周期構造が長波長変調を受けた場合，その時間発展は如何に記述されるだろうか。(5・1)式の並進対称性のため解にも並進自由度が残り，$\vec{X}_0(x-\phi)$，ϕ；任意パラメータ。この ϕ が，歪みの遅いダイナミクスを記述する変数となる。換言すれば，Goldstone モード；

$$\vec{u}_0(x) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{X}_0(x)}{\mathrm{d}x} \tag{5・2}$$

がこの系の中立モードである。そこで

$$\begin{cases} \vec{X}(x,\ t) = \vec{X}_0(\phi(x,\ t)) + \vec{\rho}(x,\ t) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \Omega(x,\ t) \end{cases} \tag{5・3}$$

$$\text{ただし}\quad \phi(x,\ t) \equiv x - \psi(x,\ t)$$

と置くが，ここで $\vec{\rho}$, Ω は，$\phi(x,t)$ 及び $\partial_x \psi$, $\partial_x^2\psi$, …の汎関数であり，ϕ については λ ー周期的とする。展開の基底には，$\vec{X}_0$ における線型化演算子 L の固有関数系 $\{\vec{u}_l\}_l$ をとる；

$$L = \frac{\partial}{\partial \vec{X}_0}\vec{F}(\vec{X}_0) + D\partial_x^2$$
$$L\vec{u}_l = \lambda_l \vec{u}_l \tag{5・4}$$

これを用いて分離の要請を

$$(\vec{u}_0^+,\ \vec{\rho}) \equiv \int_0^\lambda \mathrm{d}\phi\, \vec{u}_0^+(\phi)\vec{\rho}(\phi) = 0 \tag{5・5}$$

と置き，即ち

$$\vec{\rho}(x,\ t) = \sum_{l \neq 0} \rho(\partial_x\psi,\ \partial_x^2\psi, \cdots)^{(l)}\vec{u}_l(\phi) \tag{5・5$'$}$$

とする。(5・1) への代入の結果

$$L\vec{\rho}(\phi,\ \partial_x\psi,\ \partial_x^2\psi, \cdots) = \vec{B}(\phi,\ \partial_x\psi,\ \partial_x^2\psi, \cdots)$$

$$\text{ただし}\quad \vec{B} = -\Omega\,\vec{u}_0(\phi) - D\partial_x^2\vec{X}_0 + (\text{高次の微小量}) \tag{5・6}$$

となり，これに対する可解条件；

$$(\vec{u}_0^+,\ \vec{B}) = 0 \tag{5・7}$$

は最低次で次の運動方程式；

$$\dot{\psi} = \nu\partial_x^2\psi + \mu\{-\partial_x\psi + (\partial_x\psi)^2\}$$

$$\text{ただし}\quad \nu = (\vec{u}_0^+,\ D\vec{u}_0)$$

$$\mu = (\overrightarrow{u_0}^{+},\ D\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_0}}{\mathrm{d}\phi}) \tag{5・8}$$

を与える。定在波 $\overrightarrow{X_0}$ は一般に鏡像対称であることを考慮すると，$\overrightarrow{u_0}^{+}$，$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_0}}{\mathrm{d}\phi}$ の偶奇性より $\mu=0$ となり，拡散方程式；

$$\dot{\Psi} = \nu\partial_x^2\Psi \tag{5・9}$$

が得られる。

以上4例を通じて示された共通の構造を整理する意味で，表1に対応関係をまとめておく。

表1.　4つの代表的縮約法

動的縮約理論	中立モード	中立モードに加わる摂動
§1. Krylov－Bogoliubov－Mitropolsky の理論	線形振動における位相と振幅	・非線型性 ・減衰や励起 ・強制外力 ・外部雑音　等
§2. Newell－Whitehead の理論	分岐における臨界モード	・分岐点からのズレ ・非線型性 ・モード振幅の空間的非一様性　等
§3. Chapman－Enskog の理論	衝突に際する5つの恒量	・(空間各点で定義した) 密度・速度・温度の不均一性
§4. Phase dynamics	非摂動解のもつ Goldstone モード	・位相の空間的変化 ・波形の歪み ・媒質の不均一性 ・外部雑音　等

Part Ⅱ　Phasedynamics

先の§5では，簡単な phasedynamics の例として一次元反応拡散系での空間周期構造の長波長歪みを取上げたが，従来 phasedynamics で扱ってきた他の系も同じく一貫した見方で定式化することができる。

まず最初に，phasedynamics 或いは phase をどういう意味で用いているかについて触れておくべきであろう。

‘位相による記述’は，流体力学や反応拡散系においてかなり以前から数々の試みがなされているが，phasedynamics として必ずしも明確に統一された定義なり理論的構造があるわけ

ではない。そこで，少くともここでは，次のように特徴付けておこう。Phasedynamics という摂動法によって動的縮約が可能なのは，連続対称性を破った解が既に存在している場合である。このときそれに付随するGoldstoneモードの振幅をphase と呼ぶ。非摂動解においてはphase は任意定数をとりうるパラメータである。系が何らかの摂動を受けた結果，生じる解軌道の変位自身は微小に留まり得ないだろうが，その永年性を phaseの緩慢な時空間依存性により吸収し，それでも残る局所平衡からのズレを微小量とするのである。永年性をphaseに吸収させることで，系全体のdynamicsを phase のdynamics へと射影したわけである。局所平衡からの微小なズレを摂動として逐次取込むことでこの dynamicsは系統的に摂動展開でき，系の漸近的挙動については任意の精度で求められる。ただしここでdynamicsと言うのは，解軌道そのものではなく，発展方程式を求めることに主体を置いている。

第Ⅱ部の前半4節§6－9では，従来より phasedynamics として一応確立した結果を，改めて先の形式に則って示す。その後§10，11 で，新たな適用例としていずれもGoldstone モードの他に中立安定な波形歪みが存在し，それがGoldstone モードの滑り出しへと変換される，という興味ある2例を挙げる。特に最後の例は，現段階で未完成な部分もあるが，これによりphasedynamicsが defectの dynamics をも扱いうる方法であることが自然に理解できるのではないだろうか。

§6　自励振動系

最初に一般的表式を求めるために，安定な極限周期解が微小な変形を受けた場合を考えよう。構造安定性を仮定している限り，元より少し歪んだやはり安定極限周期解が得られるに過ぎないが，続く各例は，摂動項を適当に置換えることでこの結果をそのまま使えるのである。

非摂動系は n 次元常微分方程式系；

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}(\vec{X}) \tag{6・1}$$

であり，周期 T の安定な極限周期解 $\vec{X}_0(t+T)=\vec{X}_0(t)$ をもつとする。これが摂動を受け，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}(\vec{X})+\varepsilon\vec{f}(\vec{X}) \tag{6・1$'$}$$

となった状況を考える。非摂動系 Goldstoneモード $\vec{u}_0\equiv\dfrac{\mathrm{d}\vec{X}_0}{\mathrm{d}t}$ が存在するために phasedynamicsが適用でき，摂動解を

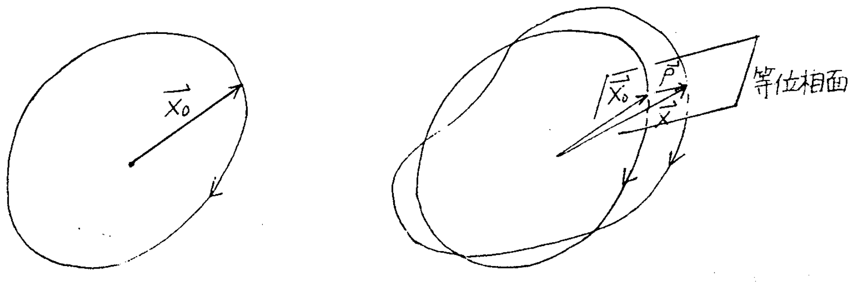
$$\left\{\ \vec{X}(t)=\vec{X}_0(\phi(t))+\vec{\rho}(\phi(t))\right. \tag{6・2}$$

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 1 + \Omega\,(\,\phi\,(t)) \right.$$

$$\text{ただし}\quad \phi\,(t) \equiv t + \varphi\,(t)$$

とおく。

新しく導入した$n+1$個の微小量$\vec{\rho}\,(\phi)$, $\Omega\,(\phi)$は，$t \to \infty$でϕのT- 周期関数となることが結果的にわかる。つまりtに代って$\phi\,(t)$でパラメトライズすると周期的な$\vec{\mathrm{X}}\,(\phi)$が得られるわけだ。



(a) 非摂動系　　(b) 摂動系

Fig. 3

1つの過剰な変数に対して，分離条件を課さねばならない。それで初めて$\vec{\mathrm{X}}_0$上以外の状態点に対する位相ϕが定義され，換言すれば余次元1の等位相面が定義されることになる。1つの有用な方法として，従来しばしばisochronを考えた。いわばこれは，非摂動系に対して周期T毎のsnap shotをとって得られる安定多様体に相当し，最低次に限定して考えるときにはよいのだが，一般の摂動展開には線形固有空間を考える方が遙かに便利だろう。そこで，非摂動系を$\vec{\mathrm{X}}_0$の周りで線型化した演算子$L\,(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{F}(\vec{\mathrm{X}}_0)}{\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_0}$をとり，その固有関数系で考えることにする。このときLはT-周期的であるためFloquetの定理から$(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - L\,)\,\vec{\rho} = 0$の解は一般に

$$\vec{\rho}\,(t) = S\,(t)\,\mathrm{e}^{\Lambda t}\vec{\rho}\,(0)$$

$$\text{ただし}\quad S\,(t+T\,) = S\,(t),\ S\,(0) = I$$

という形で与えられる。これはより直観的には次のように表現できる。T-周期的な$S^{-1}(t)$を用いた相似変換によって$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - L\,(t)$を$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \Lambda = S^{-1}\,(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - L\,)\,S$へ，$\vec{\rho}\,(t)$を$S^{-1}\vec{\rho}$へ変換することで，(つまり常に$\phi\,(t=0) \equiv 0$へ引戻すことで) 時間に依存しない$\Lambda$の固有関数問題に帰着できるわけである。$\Lambda$の (右) 固有関数系を$\{\vec{u}_l\}_l$とおき，対応する固有値$\{\lambda_l\}_l$は非縮退とする。軌道の接線方向の固有ベクトル$\vec{u}_0 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{X}}_0}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$に対応して$\lambda_0 = 0$であり，$l \neq 0$に対しては，$\vec{\mathrm{X}}_0$の安定性より$\mathrm{Re}\,\lambda_l < 0$である。このとき，$\{\vec{u}_l\}_{l \neq 0}$が張る余次元1の空間を等位相空間と定義しよう。これは軌道上の点$\vec{\mathrm{X}}_0\,(\phi = 0)$においてisochronに接する安定固有空間で

ある。軌道上の任意の点 $\vec{X}_0(\phi)$ で定義するには再び $S(\phi)$ で逆変換すればよく，一般に $\vec{X}_0(\phi)$ における等位相空間として $\{S(\phi)\vec{u}_l\}_{l\neq 0}$ が張る空間をとる。

以上のような等位相空間の定義は，(6・2)の展開形の分離法として $\vec{\rho}$ が位相のズレを含まないという条件を，直交条件；

$$\begin{aligned}(\vec{u}_0^{\,+}S^{-1}(\phi),\ \vec{\rho}(\phi)) &= (\vec{u}_0^{\,+},\ S^{-1}(\phi)\vec{\rho}(\phi)) \\ &= 0\end{aligned} \tag{6・3}$$

として書き下すことと等価である。よって，

$$S^{-1}(\phi)\vec{\rho}(\phi) = \sum_{l\neq 0}\rho_l(\phi)\vec{u}_l \tag{6・3)$'$}$$

とおこう。

(6・2)を(6・1)$'$へ代入し最低次で

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} - L\right)\vec{\rho}(\phi) = -\Omega S(\phi)\vec{u}_0 + \varepsilon\vec{f}(\vec{X}_0(\phi))$$

を得る。点 $\vec{X}_0(0)$ で考えると便利なので左から S^{-1} を乗じ

$$\sum_{l\neq 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} - \lambda_l\right)\rho_l(\phi)\vec{u}_l = -\Omega\vec{u}_0 + \varepsilon S^{-1}(\phi)f(\vec{X}_0(\phi)) \tag{6・4}$$
。

まず可解条件は，これと $\vec{u}_0^{\,+}$ との内積をとり，

$$\Omega = b_0(\phi) \equiv \varepsilon(\vec{u}_0^{\,+}S^{-1}(\phi)\vec{f}(\vec{X}_0(\phi)))。$$

よって最低次の運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \simeq 1 + b_0(\phi) \tag{6・5a}$$

次に $\rho_l(\phi)$ を解くには(6・4)式と $\vec{u}_l^{\,+}$ との内積をとって得られる線型常微分方程式；

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} - \lambda_l\right)\rho_l(\phi) &= b_l(\phi) \\ &\equiv \varepsilon(\vec{u}_l^{\,+}S^{-1}(\phi)\vec{f}(\vec{X}_0(\phi)))\end{aligned}$$

を解いて

$$\rho_l(\phi) = \mathrm{e}^{\lambda_l\phi}\rho_l(0) + \int_0^{\phi}\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{e}^{\lambda_l(\phi-\phi')}b_l(\phi') \tag{6・5b}$$

となる。$\vec{X}_0$ の安定性及び $b_l(\phi)$ の T-周期性により，$\rho_l(\phi)$ によって $\vec{\rho}(\phi)$ は $\phi\to\infty$ で T-周期

関数へ漸近する。以下任意の次数で $\vec{\rho}(\phi)$, $\Omega(\phi)$ が漸近的に周期的になることは，帰納的に明らかであろう。

§7　複数の振動子間の相互作用

§§7－1.　2個の結合振動子系

共に，安定な極限周期軌道をもつ2つの僅かに異る力学系 $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$が，弱く相互作用している状況を考えよう；

$$\frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{F}_i(\vec{X}_i) + \vec{V}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)$$

$$\equiv \vec{F}(\vec{X}_i) + \delta\vec{F}_i(\vec{X}_i) + \vec{V}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \tag{7・1}$$

$$(i, j) = (1, 2), (2, 1) \text{ 以下同じ}$$

このとき，両者の差異及び相互作用を共に摂動として扱い，

$$\vec{P}_i(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \equiv \delta\vec{F}_i(\vec{X}_i) + \vec{V}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \tag{7・1$'$}$$

とする。以下の表式は前節と同じものを用いることにし，展開形；

$$\begin{cases} \vec{X}_i(t) = \vec{X}_0(\phi_i) + \vec{\rho}_i(\phi_i, \phi_j) \\ \dfrac{d\phi_i}{dt} = 1 + \Omega_i(\phi_i, \phi_j) \end{cases} \tag{7・2}$$

$$\text{ただし}\quad \phi_i \equiv t + \varphi_i(t)$$

に対して，分離条件；

$$S^{-1}(\phi_i)\vec{\rho}_i(\phi_i, \phi_j) = \sum_{l \neq 0} \rho_{il}(\phi_i, \phi_j)\vec{u}_l \tag{7・3}$$

を課す。最低次では，

$$\sum_{l \neq 0}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_1} + \frac{\partial}{\partial\phi_2} - \lambda_l\right)\rho_{il}(\phi_i, \phi_j)\vec{u}_l$$

$$= -\Omega_i\vec{u}_0 + S^{-1}(\phi_i)\vec{P}_i(\vec{X}_0(\phi_i), \vec{X}_0(\phi_j)) \tag{7・4}$$

より，

$$\frac{d\phi_i}{dt} = 1 + \Omega_i$$

$$= 1 + \delta\omega_i(\phi_i) + G(\phi_i, \phi_j) \tag{7・5a}$$

$$\text{ただし}\quad \delta\omega_i(\phi_i)=(\vec{u}_0^{+},\ S^{-1}(\phi_i)\,\delta\vec{F}_i\,(\vec{X}_0(\phi_i)))$$

$$G(\phi_i,\ \phi_j)=(\vec{u}_0^{+},\ S^{-1}(\phi_i)\vec{V}(\vec{X}_0(\phi_i),\ \vec{X}_0(\phi_j)))$$

となる。ここで $\delta\omega_i$, G はいずれも引数について T-周期的であり，また ϕ_i は1周期内で殆ど変化しないことを利用して，更に near identity transformation を行おう。これは，変数変換後の方程式が定数係数となるよう新な変数を選ぶのである。変換後得られる上記の係数は，単純な時間平均で正しく与えられることがわかる。即ち，

$$\delta\omega_i \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ \delta\omega_i(t+\phi_i),\quad \omega_i \equiv 1+\delta\omega_i$$

$$\Gamma(\phi_i-\phi_j)\equiv\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, G(t+\phi_i,\ t+\phi_j)$$

を用いて，

$$\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}=\omega_i+\Gamma(\phi_i-\phi_j) \tag{7・5a)'}$$

が得られる。一般に多数個の振動子系に対しても全く同様に

$$\frac{\mathrm{d}\phi_\alpha}{\mathrm{d}t}=\omega_\alpha+\sum_{\beta:\,\mathrm{coupled}}\Gamma_{\alpha\beta}(\phi_\alpha-\phi_\beta)$$

となることは明らかだろう。このようにして，振動子多体系の一模型が得られる。

§§ 1－2．外部雑音を含む場合

前小節では，振動子ごとのばらつきを考えたが，今度は各振動子が独立に受ける外部雑音を摂動として考える。再び2個の結合系をとり，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{F}(\vec{X}_i)+\vec{f}_i(\vec{X}_i,\ t)+\vec{V}(\vec{X}_i,\ \vec{X}_j)。$$

雑音の統計的性質は全振動子で同じものとし，一般性を失わず $<\vec{f}_i>_i=0$ とおく。この場合，

$$\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}=1+G(\phi_i,\ \phi_j)+g_i(\phi_i,\ t)$$

$$\text{ただし}\quad g_i(\phi_i,\ t)=(\vec{u}_0^{+},\ S^{-1}(\phi_i)\vec{f}_i(\vec{X}_0(\phi_i),\ t))$$

となり，2変数の連立 Langevin 方程式が得られるわけである。これの単純な時間平均はできないが，特に g_i が Gaussian 白色雑音；

$$<g_i(\phi_i,\ t)>=0,$$

$$< g_i(\phi_i, t)\, g_j(\phi_j, t) > = 2D(\phi_i)\,\delta_{ij}\,\delta(t-t')$$

の場合には以下のような取り扱いができる。即ち，上式を確率分布関数 $P(\phi_1, \phi_2, t)$ に対するFokker-Plank 方程式に書き換え，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{\partial I_i}{\partial \phi_i} \\ I_i = \left\{1 + G(\phi_i, \phi_j) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}D(\phi_i)}{\mathrm{d}\phi_i}\right\} P - \dfrac{\partial}{\partial \phi_i}\left[D(\phi_i)P\right], \end{cases}$$

或いは，$Q(\phi_1, \phi_2, t) \equiv P(t+\phi_1, t+\phi_2, t)$ に対して，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{\partial J_i}{\partial \phi_i} \\ J_i = \left\{G(t+\phi_i, t+\phi_j) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}D(t+\phi_i)}{\partial \phi_i}\right\} Q - \dfrac{\partial}{\partial \phi_i}\left[D(t+\phi_i)\,Q\right] \end{cases}$$

となる。ここでは Q の時間変化が緩慢であり，G, D の周期 T の間はほぼ一定なので先と同様の平均操作による簡略化を行い，

$$\Gamma(\phi_i - \phi_j) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\; G_i(t+\phi_i, t+\phi_j)$$

$$D \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\; D(t+\phi_i)$$

を用いて，

$$J_i = \Gamma(\phi_i - \phi_j)\,Q - D\frac{\partial Q}{\partial \phi_i}$$

を得る。再びこれを力学変数 ϕ_i に対するLangevin方程式で表現すると，

$$\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t} = \Gamma(\phi_i - \phi_j) + g_i(t)$$

$$\text{ただし}\quad g_i(t) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}\phi\; g_i(\phi, t)$$

となる。一般に多数個の場合も，同様の表式で与えられる。

§8　振動媒質

次は，離散的な振動子系でなく連続系を考えよう。これは反応拡散系

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{X}) + D\nabla^2\vec{X} \tag{8・1}$$

において，空間一様な時間周期解 $\vec{X}_0(t)$ に，拡散を摂動的に考慮することに相当する。この場合，展開形；

$$\begin{cases} \vec{X}(\vec{r},\ t)=\vec{X}_0(\phi(\vec{r},\ t))+\vec{\rho}(\phi,\ \nabla\phi,\ \nabla^2\phi,\cdots) \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=1+\Omega(\phi,\ \nabla\phi,\ \nabla^2\phi,\cdots) \end{cases} \tag{8・2}$$

$$\text{ただし}\quad \phi(\vec{r},\ t)\equiv t+\varphi(\vec{r},\ t)$$

の微小量 $\vec{\rho}$, Ω は，ϕ 及びその任意階数の空間微分 $\nabla^k\phi$ の汎関数として求めることになる。これら全ての局所量を考えることは，換言すればある時刻 t における位相 $\phi(\vec{r},\ t)$ の全空間構造の汎関数と見做すことである。分離条件を

$$S^{-1}(\phi)\vec{\rho}=\sum_{l\neq 0}\rho_l(\phi,\ \nabla\phi,\ \nabla^2\phi,\cdots)\vec{u}_l \tag{8・3}$$

と置き，最低次の運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\simeq\nu\nabla^2\varphi+\mu(\nabla\varphi)^2 \tag{8・5a}$$

$$\text{ただし}\quad \nu\equiv(\vec{u}_0^{+},\ S^{-1}DS\vec{u}_0)$$

$$\mu\equiv(\vec{u}_0^{+},\ S^{-1}D\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\phi}\vec{u}_0)$$

と Burgers 型で求まることがわかる。但し定数係数で与えられるように，この変数 φ は near-identity transformation により元の φ 及び $\nabla\varphi$, $\nabla^2\varphi,\cdots$ の汎関数として与えられるものである。

ところが拡散係数 ν が負の微小量になると，(8・5a) 式では解は不安定性の結果発散してしまう。物理的現実に即した方程式を得るには，摂動を押さえる効果として，摂動展開の次の次数で出てくる負係数の項が本質的に重要になる。そのような 4 階の空間微分項及び既出の拡散項・非線型項が全て釣り合う場合に，特徴的な時空間及び位相のスケールを求めると，それぞれ

$$t_c\sim|\nu|^{-2},\ r_c\sim|\nu|^{-1/2},\quad \varphi_c\sim|\nu|$$

となる。これらを用いてスケールし直した変数；

$$\tau\equiv t/t_c,\ \vec{s}\equiv\vec{r}/r_c,\ \tilde{\varphi}_c\equiv\varphi/\varphi_c$$

を定義し方程式を書き下すと，上記 3 項のみがスケール不変であり，$\nu\to 0$ で有限に残る。以

上の考察の結果，位相乱流を記述する次の方程式が得られることになる；

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\tau} = -\nabla^2_{\vec{\rho}}\widetilde{\varphi} + (\nabla_{\vec{s}}\widetilde{\varphi})^2 - \nabla^4_{\vec{s}}\widetilde{\varphi}\ 。$$

§ 9 Wavefront dynamics

一次元では，一定速度 c で安定に伝播するキンク解（或いはパルス解）$\vec{X}_0(x-ct)$ をもつ反応拡散系に対して，2次元性，即ち付加的次元 y への弱い依存性を摂動として導入するとどうなるだろうか。これにより y 軸方向の直線から微小歪んだ wavefront 解（或いはパルス解）を求めることになる。ここで，front の位置を示す φ は一過性である。

展開形を

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{X}(x, y, t) = \vec{X}_0(\phi(x, y, t) + \vec{\rho}(\phi, \partial_y\varphi, \partial_y^2\varphi, \cdots)) \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \Omega(\partial_y\varphi, \partial_y^2\varphi, \cdots) \end{array}\right. \tag{9・2}$$

$$\text{ただし}\quad \phi(x, y, t) = x - ct - \varphi(y, t)$$

と置き，分離条件として

$$(\vec{u}_0^+, \vec{\rho}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \vec{u}_0^+(\phi)\vec{\rho}(\phi, \partial_y\varphi, \partial_y^2\varphi, \cdots)$$

$$= 0 \tag{9・3}$$

を課す。ここで $\{\vec{u}_l\}_l$ は，非摂動系を $\vec{X}_0$ で線型化して得られる演算子；

$$L\left(\phi, \frac{d}{d\phi}, \frac{d^2}{d\phi^2}\right) \equiv \frac{d}{d\vec{X}_0}\vec{F}(\vec{X}_0(\phi)) + C\frac{d}{d\phi} + D\frac{d^2}{d\phi^2}$$

の（右）固有関数系である。離散固有値をとるための要請として，$|\phi|\to\infty$ で0になる摂動のみを考えることにし，更に非縮退を仮定する。最低次で

$$L\vec{\rho} = -\Omega\vec{u}_0 + D\left\{\partial_y^2\varphi\,\vec{u}_0 - (\partial_y\varphi)^2\frac{d\vec{u}_0}{d\phi}\right\} \tag{9・4}$$

が得られ，この可解条件が運動方程式；

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega \simeq \nu\partial_y^2\varphi - \mu(\partial_y\varphi)^2$$

$$\text{ただし}\quad \nu = (\vec{u}_0^+, D\vec{u}_0),\quad \mu = \left(\vec{u}_0^+, D\frac{d\vec{u}_0}{d\phi}\right)$$

を与える。拡散係数 ν が負になる場合には（実際 piecewise linear Bonhoeffer van der

Pol モデルで見られるが）展開を次まで進め，4階微分項$-\partial_y^4\phi$を取り出さねばならないのは前節同様である。

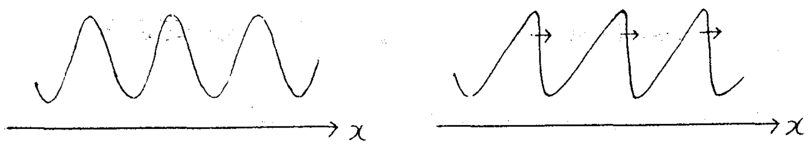
以下の２つの系は共に，Goldstoneモード以外に中立安定な波形の歪みが存在し，しかもそれが非摂動線型系のproper な固有関数ではないために，Goldstone モードと直交せず，寧ろそれへと変換されて滑りを生じる摂動として働く例である。この歪みの由来は，§10では系の分岐による自発的変形であり，§11では他の波の存在によって与えられる接続条件である。

§10　波形の自発的変形による滑りの発生

系が連続対称性を破った非摂動解を持ち，Goldstoneモードが既に存在したとする。Phase-dynamics が適用可能なこの状況下で，何らかの分岐パラメータが変化したために，臨界モードという新たな中立モードが生じ非摂動解が自発的に変形したとしよう。分岐点で生じた０固有値の二重縮退は，どのような現象を引起こすだろうか。このような問題にも今までのPhase-dynamics の枠組みをそのまま適用できるのである。

具体的には，これまでも度々用いた一次元反応拡散系を考え，空間のλ-周期的定在波解$\overrightarrow{X_0}$が存在したとする[6]。今，非摂動系の線型演算子Lが分岐パラメータμを含むものとしよう。μ-依存性は反応・拡散何れの項にも起因しうるが，ここでは反応項に付与しておく。即ち，

$$L \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overrightarrow{X_0}} \overrightarrow{F_\mu}(\overrightarrow{X_0}) + D\partial_x^2 \text{ 。}$$



(a) 非摂動系　　　(b) 摂動系

Fig. 4

Goldstoneモード$\overrightarrow{u_0} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{X_0}}{\mathrm{d}x}$は$\mu$に依らず$L$の０固有関数だが，$\varepsilon \equiv \mu - \mu_c = 0$における分岐で１つの臨界モード$\overrightarrow{u_1}$が０固有値をとることを考える。そこで，

$$L_0 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overrightarrow{X_0}} \overrightarrow{F_{\mu_c}}(\overrightarrow{X_0}) + D\partial_x^2$$

$$L = L_0 + \varepsilon L_1$$

と定義し，L_0の(右)固有関数系$\{\overrightarrow{u_l}\}_l$のうちGoldstoneモードを$\overrightarrow{u_0}$，臨界モードを$\overrightarrow{u_1}$とす

る。対応する固有値は，

$$\lambda_0' = \lambda_1 = 0$$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_l < 0,\quad l \neq 0, 1$$

である。

ところで L_0 が自己随伴でなければ，縮退した固有値をもつ L_0 は必ずしも対角化可能でなく，Jordan標準形でしか書けないことが，物理的にはかなり一般的状況として考えられる。つまり0固有値のJordan細胞が $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ となり，それに対応してproperな固有ベクトルは自明な $\vec{u}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ のみで，それと独立な $\vec{u}_1$ は位数2の広義固有ベクトル $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ となっているわけだ。即ち，

$$L_0 \vec{u}_0 = 0,\quad L_0 \vec{u}_1 = \vec{u}_0。$$

この第2式が正に，臨界モードによる歪み $\vec{u}_1$ が $\vec{u}_0$ に変換され，波形の滑りを生じることを示しているのである。また，$L_0^{\mathrm{ad}} \vec{u}_0^{\,+} = 0$，$L_0^{\mathrm{ad}} \vec{u}_0^{\,+} = \vec{u}_0^{\,+}$ により定義された $\vec{u}_0^{\,+}$，$\vec{u}_1^{\,+}$ を用いて，規格化；

$$(\vec{u}_0^{\,+}, \vec{u}_0) = (\vec{u}_1^{\,+}, \vec{u}_1) = 0$$

$$(\vec{u}_0^{\,+}, \vec{u}_1) = (\vec{u}_1^{\,+}, \vec{u}_0) = 1$$

ができる。

$\vec{X}_0$ の波形が鏡像対象な場合には，これを偶関数にとることで，$\vec{u}_i$，$\vec{u}_i^{\,+}$ $(i = 0, 1)$ は全て奇関数となり表式が簡単化される。最後の表式(10・5b)はこの場合のものである。

展開形として

$$\left\{\begin{aligned} &\vec{X}(x,\ t) = \vec{X}_0(\phi) + W\vec{u}_1(\phi) + \vec{\rho}\,(\phi, W) \\ &\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = A(W) \\ &\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \Omega\,(W) \end{aligned}\right. \tag{10・2}$$

$$\text{ただし}\quad \phi\,(x,\ t) = x - \varphi(t)$$

をとる。簡単化のため φ の x-依存性は考えず，また波形の歪みは ϕ について λ-周期的なものに限ることにする。x 方向の並進対称性を考慮し，A，Ω は W のみの汎関数とした。

分離条件としては，$\vec{\rho}$ が並進運動成分も臨界モード成分も含まない；

$$(\vec{u}_1^{+}(\phi),\ \vec{\rho}(\phi)) = (\vec{u}_0^{+}(\phi),\ \vec{\rho}(\phi)) = 0$$

或いは,

$$\vec{\rho}(\phi) = \sum_{l \neq 0,1} \rho_l(W)\vec{u}_l(\phi) = 0 \tag{10・3}$$

とする。この場合波形の歪みは，本質的な役割りを果たす第2の中立モードを含んでいるため，それとそれ以外の部分に更に分離するのが自然なのである。

(10・2)の展開形を代入すると,

$$\begin{aligned}-\Omega\vec{u}_0 + A\vec{u}_1 &= W\vec{u}_0 + \varepsilon W L_1\vec{u}_1 + L_0\vec{\rho} \\ &\quad + W^2 M:\vec{u}_1\vec{u}_1 + 2WM:\vec{u}_1\vec{\rho} + W^3 N:\vec{u}_1\vec{u}_1\vec{u}_1 \\ &\quad + \Omega W\frac{d\vec{u}_1}{d\phi} + \Omega\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\phi} - A\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial W} + (\text{高次項})\end{aligned} \tag{10・4}$$

ただし　$M \equiv \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{d\vec{X}_0^2}\vec{F}_{\mu_c}(\vec{X}_0)$，$N \equiv \dfrac{1}{3!}\dfrac{d^3}{d\vec{X}_0^3}\vec{F}_{\mu_c}(\vec{X}_0)$。

ここでは，臨界モードの振幅Wが微小量であり，$\vec{\rho}$は更に高次の微小量になることを見越して評価している。(10・4)に対して，まず$\vec{u}_1^{+}$との内積をとると，分離条件(10・3)より最低次で

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega \simeq -W \tag{10・5a}$$

次に$\vec{u}_0^{+}$との内積をとると，同じく

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= A \\ &\simeq \varepsilon W(\vec{u}_0^{+},\ L_1\vec{u}_1) + 2W(\vec{u}_0^{+},\ M:\vec{u}_1\vec{\rho}) \\ &\quad + W^3(\vec{u}_0^{+},\ N:\vec{u}_1\vec{u}_1\vec{u}_1) - W(\vec{u}_0^{+},\ \frac{d\vec{\rho}}{d\phi})\end{aligned} \tag{10・5b}$$

が得られる。ただしここで(10・5a)及び前述の偶奇性を用いた。§3でも見られたように，臨界モードの振幅に対するこの運動方程式には波形歪み$\vec{\rho}$が関与しているため，同時に$\vec{\rho}$も解かねばならない。そこで(10・4)より最低次で求め，(10・3)と合わせると,

$$\begin{aligned}-L_0\vec{\rho} &\simeq W^2\left(M:\vec{u}_1\vec{u}_1 - \frac{d\vec{u}_1}{d\phi}\right) \\ &\equiv -\sum_{l\neq 0,1}\lambda_l\,\rho_l(W)\vec{u}_l(\phi)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \rho_l(W) \simeq -\lambda_l^{-1} W^2 \{ (\vec{u}_l^{\,+},\ M : \vec{u}_1 \vec{u}_1) - (\vec{u}_l^{\,+},\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}_1}{\mathrm{d}\phi}) \}$$

$$\equiv -\alpha_l \cdot W^2$$

よって,

$$\vec{\rho}(\phi, W) \simeq -\sum_{l \neq 0,1} \alpha_l \vec{u}_l(\phi) \cdot W^2$$

と書き下せる。これを代入することで最終的に

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \simeq \varepsilon \sigma W - g W^3 \tag{10・5b$'$}$$

$$\text{ただし} \quad \sigma = (\vec{u}_0^{\,+},\ L_1 \vec{u}_1)$$

$$g = \sum_{l \neq 0,1} \alpha_l \{ 2(\vec{u}_0^{\,+},\ M : \vec{u}_1 \vec{u}_l) - (\vec{u}_0^{\,+},\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}_l}{\mathrm{d}\phi}) \} - (\vec{u}_0^{\,+},\ N : \vec{u}_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1)$$

となり, 通常の小振幅方程式の表式が得られる。また両式より, 滑り速度は $\dot{\varphi} \sim \varepsilon^{1/2}$ であるとわかる。

§11 パルス間相互作用

最後の例として, 局在したGoldstoneモード間の相互作用を考えよう。

ここでも一次元反応拡散系を例にとり, パルス間の相互作用を扱う。パルス列の相互作用に対する1つのアプローチは, 完全な空間周期解を $\vec{X}_0$ にとり, それから僅かに変形した状況をphasedynamicsで記述することである。[7] つまり展開形として

$$\begin{cases} \vec{X}(x,\ t) = \vec{X}_0(\phi(x,\ t)) + \vec{\rho}(\phi,\ \partial_x \varphi,\ \partial_x^2 \varphi, \cdots) \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \Omega(\partial_x \varphi,\ \partial_x^2 \varphi, \cdots) \end{cases}$$

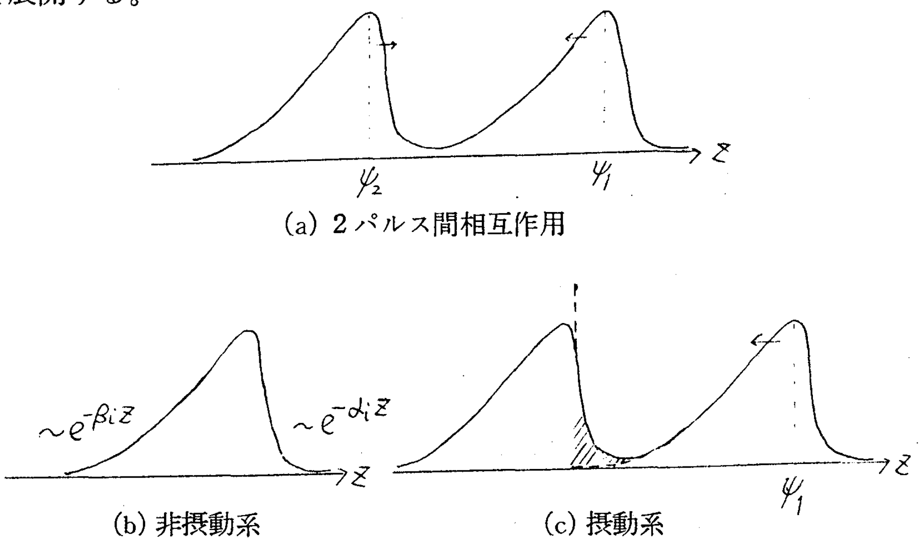
$$\text{ただし} \quad \phi(x,\ t) = x - ct - \varphi(x,\ t)$$

をとるわけで, その結果

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \simeq \alpha \partial_x \varphi + \nu \partial_x^2 \varphi + \mu (\partial_x \varphi)^2$$

が得られることは, ここまでの各節より容易にわかるだろう。これはランダムなパルス列の整

列過程の実験[8]に動機付けられたものだが，相補的なアプローチとして，２つの独立なパルスから出発しその相互作用を摂動的に扱うことも考えられるだろう。以下ではその立場で phase-dynamics を展開する。



(a) 2パルス間相互作用

(b) 非摂動系
（パルス１のみ）

(c) 摂動系

Fig. 5

N成分系；

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{X}) + D\partial_x^2 \vec{X} \tag{11・1}$$

において，そのうちn成分の拡散係数が０でないとする。これが一様定常解$\vec{X}=0$及び一定速度のパルス解$\vec{X}_0(x-ct)$を共に安定解として持つ場合を考える。動座標系$z=x-ct$をとるのが便利だが，パルスは$|z|\to\infty$で$\vec{X}_0\to 0$とする。このとき，$|z|\to\infty$での漸近的波形は，(11・1) を定常解$\vec{X}=0$の周りで線型化して得られる固有値問題の解で与えられる。即ち，$N+n$次方程式；

$$\mathscr{F}(\alpha) \equiv \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{X}} \vec{F}(\vec{X}) \Big|_{\vec{X}=0} - c\alpha 1 + \alpha^2 D \right| = 0$$

の正・負の根をそれぞれ

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_l > 0 \\ &= \beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_m < 0 \end{aligned}$$

$$\text{ただし}\quad l + m = N + n$$

とおくと，$\vec{X}_0(z)$の漸近形はこれらの線形結合で表わされる。

$$\vec{X}_0(z) \sim \sum_{i=1}^{l} \vec{A}_i\, e^{-\alpha_i z} \qquad (z \to \infty)$$
$$\sim \sum_{i=1}^{m} \vec{B}_i\, e^{-\beta_i z} \qquad (z \to -\infty)$$

次に，線型演算子 $L\left(z, \frac{d}{dz}, \frac{d^2}{dz^2}\right) = \frac{d}{d\vec{X}_0}\vec{F}(\vec{X}_0) + c\frac{d}{dz} + D\frac{d^2}{dz^2}$ は，唯一の０固有関数 $\vec{u}_0(z) = \frac{d\vec{X}_0}{dz}$ を持ち，パルス解の安定性より $\mathrm{Re}\,\lambda_l < 0$，$l \neq 0$ である。このように，$|z| \to \infty$ で $\vec{\rho} \to 0$ となる波形歪み $\vec{\rho}$ の範囲内では，０固有値は縮退せず孤立している。ところが，無限遠方で発散するある歪み $\vec{\rho}_1$ は，$\vec{u}_0$ 以外の中立モードであり，しかも $L\vec{\rho}_1 = \vec{u}_0$ となることが以下の議論から示される。

パルス１に注目し，十分遠方にパルス２が存在するときの dynamics を求めることにする（図５）。展開形を

$$\begin{cases} \vec{X}(z, t) = \vec{X}_0(\zeta(z, t)) + \vec{\rho}_1(\zeta, \phi_1(t), \phi_2(t)) \\ \dfrac{d\phi_1}{dt} = \Omega_1(\phi_1(t), \phi_2(t)) \end{cases} \tag{11・2}$$

$$\text{ただし} \quad \zeta(z, t) = z - \phi_1(t)$$

と置くが，ここでは $\vec{\rho}_1$ は L の固有空間にはないので分離条件が課し難い。$\phi_{1,2}$ は何らかの意味でパルス位置を指定する量とし，例えば peak 位置の座標としておこう。これを代入し，最低次で

$$-\Omega_1 \vec{u}_0(\zeta) = L\left(\zeta, \frac{d}{d\zeta}, \frac{d^2}{d\zeta^2}\right)\vec{\rho}_1(\zeta, \phi_1, \phi_2) \tag{11・3}$$

が得られる。この式から Ω_1，$\vec{\rho}_1$ を決定する際にも，この場合は通常の可解条件を課すことができない。ところが，波形の歪み $\vec{\rho}_1$ はパルス２の存在によることを考えれば，$\zeta \to -\infty$ での $\vec{\rho}_1$ の漸近形はパルス２の非摂動解（最低次で）と一致せねばならない。この接続条件より

$$\vec{\rho}_1(\zeta, \phi_1, \phi_2) \to \sum_{i=1}^{l} \vec{A}_i\, e^{-(z-\phi_2)} \qquad (\zeta \to -\infty)$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \vec{A}_i\, e^{-\alpha_i(\phi_1 - \phi_2)}\, e^{-\alpha_i \zeta} \tag{11・4}$$

における振幅 $\vec{A}_i$ が決定される。そこで（11・3）と $\vec{u}_0^{\,+}$ の内積をとると，

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \Omega_1 \simeq -(\vec{u}_0^{\,+}, L\vec{\rho}_1)$$
$$= -(L^{\mathrm{ad}}\vec{u}_0^{\,+}, \vec{\rho}_1) - \left[c\vec{u}_0^{\,+}\vec{\rho}_1 + D\left(\vec{u}_0^{\,+}\frac{d\vec{\rho}_1}{d\zeta} - \frac{d\vec{u}_0^{\,+}}{d\zeta}\vec{\rho}_1\right)\right]_{\zeta=-\infty}^{\infty}$$

$$= -\sum_{i=1}^{l}\left\{ c\overrightarrow{u_0}^{+} e^{-\alpha_i\zeta} - D\left(\overrightarrow{u_0}^{+}\alpha_i + \frac{d\overrightarrow{u_0}^{+}}{d\zeta}\right) e^{-\alpha_i\zeta}\right\}\Bigg|_{\zeta=-\infty} \times \overrightarrow{A_i}\, e^{-\alpha_i(\Psi_1-\Psi_2)} \tag{11·5a}$$

と求められる。歪み$\overrightarrow{\rho_1}$が局在せず$\zeta\to-\infty$で発散するために，部分積分の結果$\zeta-\infty$からの寄与が有限値をとり$(\overrightarrow{u_0}^{+}, L\overrightarrow{\rho_1}) \neq (L^{ad}\overrightarrow{u_0}^{+}, \overrightarrow{\rho_1}) = 0$となるのである。このように，最低次の運動方程式は$\overrightarrow{\rho_1}$の漸近形の振幅のみで与えられ，振幅に比例した速度が得られることがわかる。パルス2についても同様の取扱いをすることで，ϕ_1，ϕ_2 に対する連立常微分方程式が与えられる。

Phasedynamicsには Goldstone モードの存在が本質的である。従来の多くの例では空間的に広がったGoldstoneモードを考えたが，局在したものも全く同様に扱うことができる。それ故，所謂topological defectのdynamics にも有効な手段となりうるのである。

参 考 文 献

まず，代表的な動的縮約法についての一般的参考書として各々

1) N.N. Bogolivbov and Y.A. Mitropolsky : *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* , Gordon & Breach, New York 1961
2) A.C. Newell and J.A. Whitehead : J.Fluid Mech. **38** (1969) 279
3) S. Chapman and T.G. Cowling : *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases* (3rd ed.), Cambridge Univ. Press 1970
4) Y. Kuramoto : *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* , Springer Ser. Syn. Vol. 19, Springer, Heidelberg 1984が挙げられる。

また，本講義内容に直接関連する出版物としては，

5) Proc. for *Spatial Inhomogeneities and Trasient Behavior in Chemical Kinetics, Brussels, 1987* , Manchester Univ. Press 1988

が刊行予定である。

その他，本文中で触れた文献は

6) K. Maginu : J. Differential Equations **31** (1979) 130 ; **39** (1981) 73
7) T. Todani and Y. Kuramoto : Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 1248
8) T. Musha, Y. Kosugi, G. Matsumoto and M. Suzuki : IEEE Trans. Biomed. Eng. **28** (1981) 616