

研究会報告

(積分は $P^+ + P^-$ が x の二価関数の分枝が一点する点 $a = \sqrt{\lambda}$ まで行う。) 数値積分の結果, λ を横軸に取った $\Phi(1, \lambda)$ および $(2\Phi' + \frac{1}{3}\Phi)(1, \lambda)$ をプロットすることにより, δ_ν が $0.3 < \lambda < 0.6$ の範囲ではほぼ第 1 表の値に相当して取れることがわかった。

以上のモデルの真疑性を確認するためには何よりもレンツ・ベクトルの近似的保存性を数値積分軌道について直接確かめることが先決である。

文 献

- 1) J. Main, G. Wiebusch, A. Holle and K. H. Welge: Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2789
- 2) J. Main, A. Holle, G. Wiebusch and K. H. Welge: Z. Phys. D 6 (1987) 295
- 3) 例えば解説 長谷川洋, 戸田幹人, 固体物理 19 (1984) 375.
- 4) H. Hasegawa: in *Fundamental Aspects of Quantum Theory* (ed. Gorini and Frigerio) Plenum Publishing Corp (1986) 193.
- 5) H. Hasegawa and S. Adachi: J. Phys. Soc. Japan (1988) 1月号.

3. Quantal Version of Resonance Overlapping

京大・理 戸田幹人

京大・基研 池田研介

Chirikov によれば, 位相空間で resonance が重なる時に, 大域的カオスが発生する。これに対応して, 量子論で何が起こるかを次のハミルトニアンをモデルに調べた。

$$H = \frac{I^2}{2} + V \cos \theta + V \cos(\theta - \omega t) \quad (1)$$

(1)による古典力学のストロボ写像を Fig. 1 に示す。ここで resonance の接近の程度を表わすパラメータ

$$S \equiv \frac{4\sqrt{V}}{\omega} \quad (2)$$

を導入した。 H は周期 $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ で周期的であるから, 量子論において任意の波動関数 ϕ の時間

発展は次の形で表わされる。

$$\psi(0) = \sum_k a_k \varphi_k \rightarrow \psi(n\tau) = \sum_k a_k e^{i\varepsilon_k n} \varphi_k \quad (3)$$

ただし, $\{\varphi_k\}$ $\{e^{i\varepsilon_k}\}$ はそれぞれ, 時間発展演算子

$$U \equiv \text{T exp} \left\{ -i \int_0^\tau H(t) dt \right\} \quad (4)$$

の固有ベクトル・固有値である。

まず, resonance が重なりあうにつれ, 固有関数 $\{\varphi_k\}$ がどう変化していくかを見よう。Fig. 2 に示したのは, 代表的な S の 3 つの値 $S = 0.6, 0.8, 1.0$ に対して, 固有関数が大域的カオスの領域に広がっていく様子である。ここでは, 状態 $|i\rangle$ から出発した量子系が状態 $|j\rangle$ に見られる平均滞在確率 $c(i|j)$

$$c(i|j) \equiv \sum_k |\langle i|\varphi_k\rangle|^2 |\langle \varphi_k|j\rangle|^2 \quad (5)$$

を図示した。 $|i\rangle$ として $I = 0$ にある resonance の separatrix $|V\rangle$ を選び, $|j\rangle$ として運動量 \hat{I} の固有状態 $|l\rangle$ を選んだ。 $c(V|l)$ は 2 段の階段状の形をなしており, それぞれの段は, $I = 0, \omega$ にある resonance のまわりの楕円軌道を I 空間に投影した形をしている。重要なのは 2 段の間の落差の大きさである。 $S = 0.6$ では古典的には 2 つの resonance の間にトラスがあり, $I = 0$ の resonance の separatrix から出発した古典軌道は $I = \omega$ の付近に到達

することができない。従って量子論における $I = \omega$ 近傍の確率はトンネルによるものである。 $S = 0.8, 1.0$ では古典的には大域的カオスが存在し, $I = 0$ の resonance の separatrix か

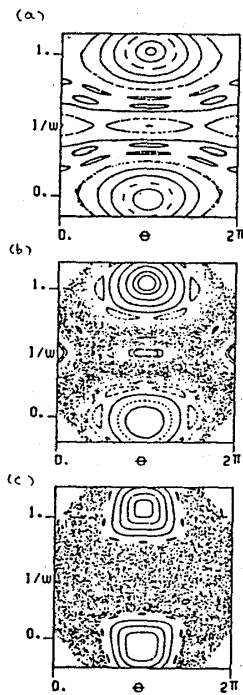


Fig. 1 古典論のストロボ画像。
(a) $S = 0.6$ (b) $S = 0.8$ (c) $S = 1.0$ 。

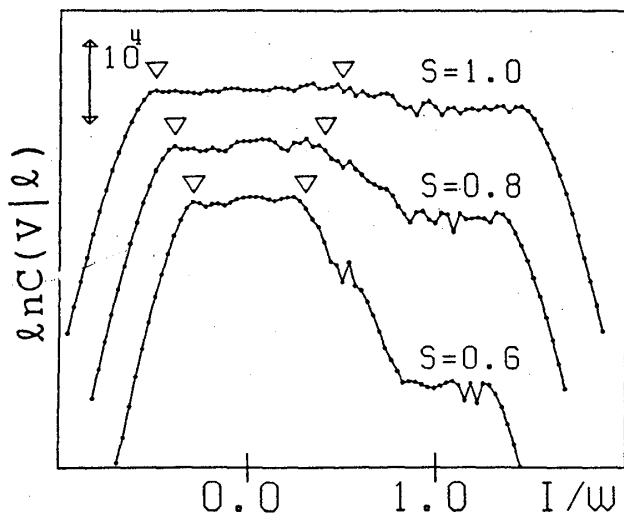


Fig. 2 $c(i|j)$ vs. $|j\rangle$ の図。初期状態 $|i\rangle = |V\rangle$ ($I = 0$ の resonance の separatrix)。終状態 $|j\rangle = |l\rangle$ (\hat{I} の固有状態)。 ∇ は separatrix の広がりを示す。 $\omega = 30.3, \hbar = 1$ 。

研究会報告

ら出発した古典軌道はやがて $I = \omega$ の近傍に到達し、長時間平均をとればカオス領域を一様に埋めつくす。これに対して量子論では $I = 0$ 近傍と $I = \omega$ の近傍の間に落差が存在しており、量子系の非エルゴード性を示している。

量子系の非エルゴード性をさらに調べるために、 $I = \omega$ 近傍で $C(i|j)$ を加算して

$$\bar{C}(i|\omega) \equiv \sum_{|\omega-j| < \Delta} C(i|j) \quad \Delta \sim \sqrt{V} \quad (6)$$

を求め、これを初期状態 $|i\rangle$ に対して図示したものが Fig.3 である。ここで $|i\rangle$ は $I = 0$ の resonance の固有状態 $|E_S\rangle$ である。古典的には、初期状態 $|E_S\rangle$ を resonance の内部から separatrix に近づけていくと、トーラスが残存している領域では $\bar{C}(E_S, \omega) = 0$ であり、トーラス領域とカオス領域の境界 (図で矢印) の外側では $\bar{C}(E_S, \omega)$ はカオス領域での平均滞在確率となる (図中で点線)。量子論ではトーラス領域でもトンネルにより $\bar{C}(E_S, \omega) > 0$ であるがその値は古典性が強くなると (図では ω が大きくなると) 指数関数的に減少する。カオス領域では逆に古典性が強まるにつれて $\bar{C}(E_S, \omega)$ の値は古典論の値に近づいていくことが予想される。

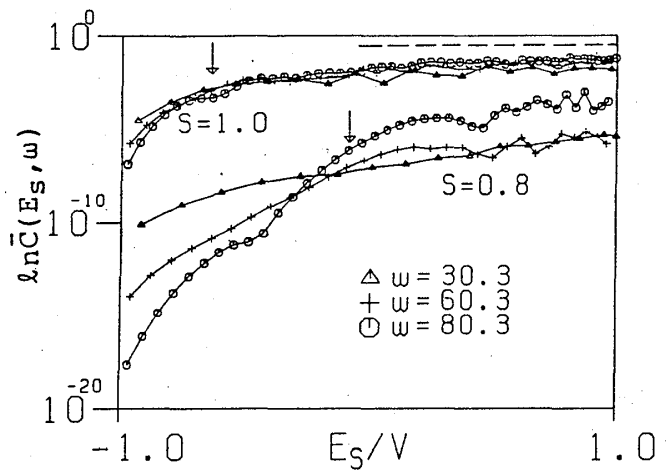


Fig. 3 $\bar{C}(i, \omega)$ vs. $|i\rangle$ の図。初期状態 $|i\rangle$ は $I = 0$ の resonance の固有状態 $|E_S\rangle$ 。いずれも $\hbar = 1$ 。

Fig.3 では確かに、トーラス領域とカオス領域の境界をはさんでその両側での $\bar{C}(E_S, \omega)$ の ω 依存性が異なっている。よって、定性的には大域的カオスの発生が量子論にも反映している。しかし、特に $S = 0.8$ ではカオス領域でも初期状態依存性が大きく、エルゴード性の破れが見られる。

以上の事から見いだされた量子論の非エルゴード性を、次には波束の時間発展から調べよう。そのために、量子論で Lyapunov 数を導入する。まず、量子系の位相空間における分布関数を

$$Q(I, \theta, t) \equiv |\langle I, \theta | \psi(t) \rangle|^2 \quad (7)$$

と定義する。ここで $|I, \theta\rangle$ は位相空間の点 (I, θ) に局在した最小不確定性波束である。或る $|I_0, \theta_0\rangle$ を初期状態として選び、分布関数 $Q(I, \theta, t)$ の等高線 $\Sigma_t = \{(I, \theta) | Q(I, \theta, t) = \omega(t)\}$ の時間変化を追う。ここで等高線 Σ_t の高さ $\omega(t)$ は、 Σ_t の内部の確率 P が一定である様

に、即ち、

$$\int_{Q(I, \theta, t) \geq \omega(t)} Q(I, \theta, t) \frac{dI d\theta}{\pi \hbar} = P \quad (8)$$

と選ぶ。 Σ_t の長さ $l(t)$ が指数関数的に増大する時、量子系は軌道不安定性を持つと考えられる。この時、量子 Lyapunov 数 α_q を

$$\alpha_q \sim \log l(t)/t \quad (9)$$

と定義する。

Fig. 4 に示すのは、ハミルトニアン(1)の下での量子系の波束の時間発展である。カオスの特徴である heteroclinic 構造が量子系でも見られる。しかし折りたたみの間隔が $O(\sqrt{\hbar})$ より細かい所では、折りたたまれる波束の分枝の間の量子干渉によりうなりが発生する。Fig.5 に等高線の長さ $l(t)$ の時間変化を示す。時間発展の初期には、カオスによる引き伸ばしのため $l(t)$ は指数関数的に増大し、これから $\alpha_q \sim 0.17$ を得る。 α_q は古典系の Lyapunov 数 $\alpha_c \sim 0.60$ より小さい。これは、量子干渉によるうなりの発生で古典パターンの一部が消失するからである。量子系の軌道不安定性は $\tau_c \sim 20$ で飽和する。この τ_c は次の様にして評価できる。量子系の波束は指数的に広がって、カオスの領域 S_R で複雑な量子干渉をしはじめる。この時

$$\tau_c \sim \log(S_R/\hbar)/\alpha_q \quad (10)$$

時刻 τ_c 以降は波束は古典カオスに特徴的な引き伸ばし作用を受けなくなる。

式(10)から示唆される重要な結論がある。式(10)の \hbar 依存性は対数的であり、現実のプランク定数の値 $\hbar \sim 10^{-34}$ [J.S] を代入しても τ_c は高

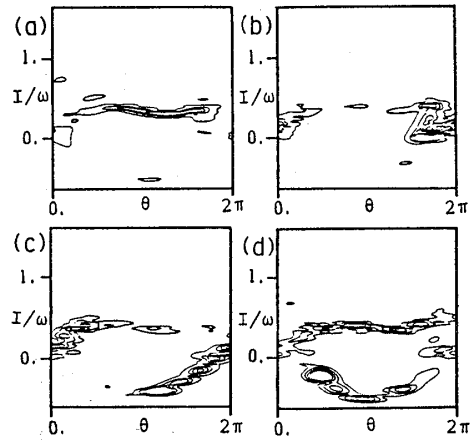


Fig. 4 波束の時間発展。 $S = 1.0$ の場合を示す。

(a) $t = 7\tau$ (b) $t = 8\tau$
 (c) $t = 9\tau$ (d) $t = 10\tau$ 。
 $V = 1600, \omega = 160.3, \hbar = 1$ 。

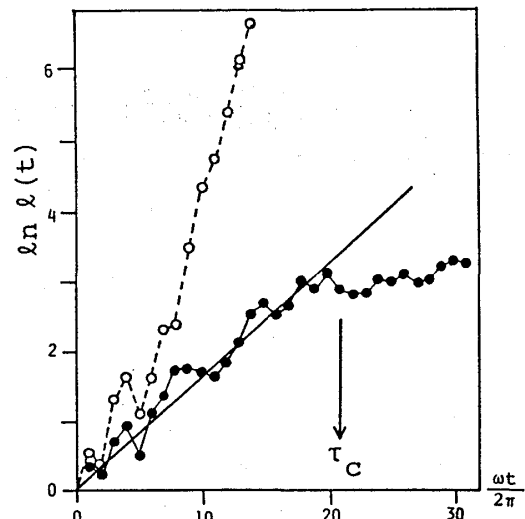


Fig. 5 $l(t)$ vs. t 。点線は古典論で実線が量子論。

研究会報告

々数十秒である。従って、巨視的世界においても量子カオスの飽和は観測できるはずである。それでは、我々が古典系のカオスを観測できるのは何故だろうか。

参考文献

- M. Toda & K. Ikeda : Quantal version of resonance overlap, J. Phys. **A20** (1987) 3833
- M. Toda & K. Ikeda : Quantal Lyapunov exponent, Phys. Lett. **124A** (1987) 165
- M. Toda & S. Adachi : Quantum Chaos, in *Dynamical Systems and Singular Phenomena*, ed. G. Ikegami (World Scientific 1987)

5. Stochastic Formulation of Energy-level Statistics and Its Application to the Diamagnetic Kepler Problem

H. Hasegawa and G. Wunner *

* Institut für Astrophysik, Universität Tübingen, West Germany

本報告は講演者 (Hasegawa) が 1987 年 5 月, 6 月西独で行った J S P S 派遣研究の要旨で, T. Yukawa の理論を確率過程の理論 (Dyson のブラウン運動の方法) と組合せて定式化し, Brody 分布, Berry-Robnik 分布に代る内挿公式を導いたものである。西独において水素原子カオスの実験的・理論的研究が進行し, 磁場中水素原子のエネルギー準位スペクトルの精密計算とその統計分布の研究がなされた。その一人である Wunner 氏の協力を得て水素原子の場合に応用した結果も含めた。本研究は同年 7 月 30, 31 日 ロンドン大学 Royal Holloway 校で開催された国際会議

Atomic Spectra and Collisions in External Fields 2

で報告を行っている。詳細については Plenum Publishing Corporation より刊行される予定である (プレプリント用意あり)。