限を受けることになる。詳細はプレプリント（KYUSHU-87-HE-4）を参照。

Fermionic Determinant と Chiral Anomalies

金沢大・理　川村嘉春，田村博志

原子核三者若手夏の学校（'87）の研究会の研究会報告とほぼ同じです。詳細については「素粒子論研究」Vol. 76（1988），No. 6を参照して下さい。

Quantum Electrodynamics と量子Hall効果

北大・理　石川　健三
京大・基研　松山　豊樹

§1. Introduction

場の量子論は、素粒子論・物性論の両分野において特に、基本的相互作用から出発して現実の複雑な物理現象を説明するための強力な手法として発展して来た。両分野の交流に依って数々の成果が生み出されてきた。

近年、場の量子論の持つ非自明な位相構造の研究が精力的に進められている。こういった非自明な位相構造は、素粒子論に於いては量子異常（Anomaly）や物理パラメーターの位相量子化などと結びつき、そこから数々の議論が展開している。一方で、場の量子論が物性系を記述する際にもうまく機能する事に鑑み、場の量子論の持つ非自明な位相構造が巨視的な系に於いても物理的実体として現実世界に発現する可能性が有り、それを追求する事は非常に意義深い事と思われる。現在、Josephson効果、量子Hall効果、電荷密度波、He超流動、Optical fiberでのBerryの位相、等々の一連の巨視的量子効果への場の量子論的アプローチが盛んに成されている。

さて我々は、量子Hall効果への場の量子論的アプローチを行なっている。量子Hall効果とは次のような現象である。　MOS反転層あるいはヘテロ結合面につくられる２次元電子系に、垂直に磁場、平行に電場をかけると電場と直交してHall電流が流れるが、そのHall伝導度σ^{xy}が電子密度を変化させたときに

(1) 電子密度を変化させてもσ^{xy}が不変なプラトー領域が現れ、

(2) プラトーでの伝導度の値が　$\sigma^{xy} = (e^2/h) \times$(整数)　（eは電荷素量、hはプランク常数）に量子化される、

という特異な振舞いを示す現象である。この現象は物性論的観点から重要な現象である事はもちろん、素粒子論の側でも重要な現象である。量子電磁力学(QED)の結合常数が$\alpha_{QED} = e^2/hc$　（cは光速度）と書ける事から、この現象をα_{QED}の精密測定に使うことが出来、QEDが本当に正しい理論か？、電子は複合構造を持たない基本粒子であるというのはどこまで本当か？、等の重要な問題に答える鍵を与える。このとき重要な事は、(2)の性質がどこまで厳密に言えるかという点である。この性質は非自明な位相構造に依る位相量子化の機構が働いている事を強く暗示する。従って、場の量子論の手法に依ってこ

の位相構造を明かにし、その厳密性を保証することは極めて重要なことであると考える。また(1)の性質は、電子の局在状態の存在を意味しており、それに場の量子論的見地からの解釈を与える事もまた重要な問題である。以下では、我々の議論の基礎となる強磁場中の有効理論、多成分量子電磁力学(Multi-component QED_3)、とそのもとでの位相量子化の構造及び局在状態の意味付けについて、基本的なアイデアを中心に我々の仕事を紹介する。

§2. Multi-component QED_3

強磁場中の2次元電子系の有効理論multi-component QED_3を構成する。強磁場中の2次元電子系のエネルギー・レベルはLandau level にスプリットする。その波動関数$\phi_N(R, x)$、(NはLandau level, Rはサイクロトロン運動の中心座標、xは電子の座標)を用いて$\phi(t_0, x) = \Sigma_{N,R} a_N(t, R)\phi_N(R, x)$ と一般のschrodinger場ϕを展開し、展開係数a_Nを成分に持つフェルミオン場(multi-component field)を力学変数と考えて場の量子論を構成する。実際にはテクニカルな理由から先の固有関数を修正し中心座標を格子点上に持つ関数$\chi(t, R_n)$を使う。すなわち、Schrodinger作用にその展開系を代入しχ_Nを積分し、残ったa_Nでmulti-component場$\phi(t, x) \equiv (\cdots, a_N, \cdots)$ を組む事によりMulti-component QED_3 を得る。この理論は、磁場中のfermion場の(近似的に)Landauレベルに対応する集団modeを抜き出し、それをdynamicalな自由度と考えて理論を構成しており、いわばback groundに磁場を持つ2次元電子系の有効理論である。

量子Hall効果を見るには、この系に更に外場として電場をかけそれに対する応答currentを調べれば良い。外場によって誘導されるcurrentは

$$J^{\mu}(x_0, x) = (1/2)\int d^3y\, \Pi^{\mu\nu}(x_0-y_0, x-y) A_{\nu}^{ext}(y_0, y)$$

で求められる。ここで$\Pi^{\mu\nu}$は真空編極テンソル、A_{ext}^{ν}は外場である。今、特に外場として1-方向に一様な電場Eを選ぶと、Fourier変換を用いて、2-方向のcurrentが

$$J^2(x_0, x) = i(d/dp_1)\Pi^{20}(p_0, p)|_{p=0} = (i/3!)\varepsilon_{\mu\nu\rho}(d/dp_{\mu})\Pi^{\nu\rho}(p_0, p)|_{p=0}E$$

となり、すなわち我々の注目すべき物理量Hall伝導度は

$$\sigma^{xy} = (i/3!)\varepsilon_{\mu\nu\rho}(d/dp_{\mu})\Pi^{\nu\rho}(p_0, p)|_{p=0}E$$

となる。我々は実際、multi-component QED_3において化学ポテンシャル及び有限温度の効果を取り入れて摂動の1-loopのorderで§1.で述べた(1),(2)の振舞いをσ_{xy}が示すことを確かめた。

§3. Topological quantization of σ_{xy}

Hall伝導度がfull orderのestimateで位相不変量と関係付けられ、従ってプラトーでの値が厳密に $\sigma_{xy} = (e^2/h) \times$(整数) となることを示す。

その前に、以下の議論で本質的な役割を演じるWard-高橋の恒等式を導く。我々は今、現実の系と対応させてより一般的にelectron, photon phonon, impurity間の相互作用を許す。multi-component QED_3はゲージ不変な理論で、電荷保存が保証されているが、これをlocalな言い方で表わしたものがWard-高橋の恒等式である。この式のエネルギー・運動量空間に於ける表式を求めたいのであるが、impurityポテンシャルがあるため並進不変性が壊れ、通常のナイーブな保存vertex及び保存伝搬関数に依る表示ができない。そこで並進不変な部分を抽出し(diagram technique上は、複数の非保存vertexから保存vertexを構成する。一般に保存vertexのタイプは無限個になる。)、それに対してFourier変換を行なうことで結局Ward-高橋の恒等式として

$$\Lambda^{\mu}(p_0,\ p)=(d/dp_{\mu})S^{-1}(p_0,\ p)$$

を得る。ここでΛ^{μ}及びSは、full orderのfermion-photon vertex関数及びfermion 伝搬関数である。上式は通常のWard-高橋の恒等式と形の上では同じであるがその意味合いに違いがある。この式は非並進不変な理論の並進不変なセクターで成り立つ式である。

§2.で述べた様に、Hall伝導度は真空編極テンソルの一回微分、すなわち三点関数の完全反対称部分で与えられる。それをdiagram techniqueを用いて見積ると、各vertex関数及び伝搬関数の高次補正として表わせるタイプのdiagramとそれ以外のタイプの二つに分類できる。後者は、Ward-高橋の恒等式と、完全反対称テンソル$\varepsilon_{\mu\nu\rho}$が前にかかることを考慮すると、σ^{xy}には寄与しない事が分かる。一方、前者は、やはりWard-高橋の恒等式を使って

$$\sigma^{xy}=(e^2/h)(1/24\pi^2)\int d^3p\,\varepsilon_{\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}[(d/dp_{\mu})S^{-1}S(d/dp_{\nu})S^{-1}S(d/dp_{\rho})S^{-1}S]$$

となる。さて今考えている積分領域はエネルギー・運動量空間であるが、§2. で見た様に空間座標は離散的な格子になっておりそのため運動量空間はトーラスになる。一方エネルギーの方向はanomalousな次元がないとすると適当な規格化により$p_0=\pm\infty$でのS(p_0, p)を同一視できる。従って、積分領域はpinchedトーラス($T^{1,2}$)と呼ばれるコンパクトで境界のない空間になっている。Sは一般にGL(N, C)（Nは考えているLandauレベルの数）の要素と見なせるが、２つのunitary行列UとVを用いてS=UDV（Dは対角行列）と対角化でき、これを上式に代入すると、σ^{xy}はSがU及びVに変わったものの和に書ける。この時

$$(1/24\pi^2)\int_{T^{1,2}} d^3p\,\varepsilon_{\mu\nu\rho}\ \mathrm{Tr}[(d/dp_{\mu})U^{-1}U(d/dp_{\nu})U^{-1}U(d/dp_{\rho})U^{-1}U]$$

は$T^{1,2}$空間からU(N)群への写像のwinding numberになっており整数値をとるので、σ^{xy} = $(e^2/h)\times$(整数)が厳密に成立する。Hall伝導度σ^{xy}はエネルギー・運動量空間から伝搬関数の空間への写像のwinding number、位相不変量、と関係付けられており、それがσ^{xy} の量子化の起源である。

§4. Localization

次に局在（Localization）の問題が我々のアプローチでどう解釈されるかを見る。問題となるのは、一般に相互作用があるとLandauレベルを中心にbroadなバンドが出来、そこに伝導度に関与できる電子状態が存在するのに、実際には電子の状態密度を変化させてもHall伝導度の値が不変に保たれプラトーが現われるのは何故かという点である。電子は、Landauレベルの中心部が非局在、その外側で局在状態にあると考えられる。

我々の今までの位相量子化の議論は、Euclid空間、すなわち虚時間の世界で行なわれてきた。実際の物理量を導出するには、Minkowski空間に解析接続しなければならない。この時、問題となるにはfull伝搬関数の解析的性質で、これが局在・非局在に重要な関連を持つ。

p_0の複素平面を考える。虚軸から実軸への解析接続を行なうわけであるが、実軸上には複数個のLandauレベルに対応するpoleが並び，それらは相互作用に依ってbroadになっている。解析接続した際、化学ポテンシャルの値によって、(i)broadなsingularity全体を拾う場合、(ii)singularity上をcontourが通過しその一部を拾う場合がある。従って、MinkowskiでのHall伝導度$(\sigma^{xy})_{\mathrm{Mink}}$は一般に、$(\sigma^{xy})_{\mathrm{Mink}}=(\sigma^{xy})_{\mathrm{Eucli}}+(\sigma^{xy})_{\mathrm{Pole}}+\Delta\sigma^{xy}$と書ける。ここで$(\sigma^{xy})_{\mathrm{Eucli}}$は以前に議論されたEuclid空間でのHall伝導度、$(\sigma^{xy})_{\mathrm{Pole}}$はbroadなsingularity全体からの寄与，$\Delta\sigma^{xy}$はsingularityの一部からの寄与を表わす。$(\sigma^{xy})_{\mathrm{Eucli}}$は§3.で議論されたように$(e^2/h)\times$(整数)であり、$(\sigma^{xy})_{\mathrm{Pole}}$も運動量空間がトーラスで$p_0$積分が閉じた経路なのでやはり$(e^2/h)\times$(整数)となる。問題

は$\Delta\sigma^{xy}$の寄与で、この時、伝搬関数の解析的な振舞いが問題になる。fullの伝搬関数をスペクトル表示すると

$$S(p_0,\ p)=\int dw\ \frac{f(w,\ p)}{p_0-w+i\varepsilon\,\mathrm{sing}(p_0-\mu)}$$

となる。電子の局在・非局在 は、スペクトル関数fで見るとそれがpのsmoothな関数であるか、singularな関数であるかに対応している。この時、fがsmoothな場合には、(p_0, p_1)積分を考えて見ると、積分領域を連続的に縮めていってもsingularityに引っかかる事なくその領域を零にでき、従って$\Delta\sigma^{xy}=0$となり$(\sigma^{xy})_{Mink}=(e^2/h)\times$(整数)が保証される。一方、fがsingularityを持つ場合には、先の連続変形でどこかでそのsingularityに引っかかり積分領域を零にする事ができなくて、一般に$\Delta\sigma^{xy}\neq$（整数）となり$(\sigma^{xy})_{Mink}=(e^2/h)\times$(整数)が保証されない。この様にして、局在状態でプラトーが現れ、非局在状態で$(\sigma^{xy})_{Mink}$がホップするという階段状の振舞いが実現すると考えられる。

§5. Conclusion

我々の一連に仕事、量子Hall効果への場の量子論的アプローチ、に基付き、強磁場中の２次元電子系の有効理論、多成分電磁力学（Multi-component QED_3）の構成、Hall伝導度の位相量子化の機構、及び局在・非局在の意味付けとプラトーの出現について報告してきた。本質は、fullのfermion伝搬関数に依るエネルギー・運動量空間から行列空間への写像にある。それの位相的性質がHall伝導度の量子化と結び付き、一方、解析的な性質がプラトーの出現すなわち局在と結び付く。

我々の仕事の詳細については、以下の文献を参照して下さい。

References

1) K. Ishikawa, Phys. Rev. Lett. 53, 1615(1984): Phys. Rev. D31, 1432(1985)
2) O. Abe and K. Ishikawa, Phys. Lett. 161B, 159(1985): P. 137 in "Rationale of Beings" published in honor of Prof. G. Takeda, edited by K. Ishikawa, et al. (World Scientific 1986)
3) K. Ishikawa and T. Matsuyama, Hokkaido Univ. preprint, EPHOU85 SEP014: Z. Phys. C33, 41(1986): Nucl. Phys. B280[FS18], 523(1987)
4) T. Matsuyama, Prog. Theor. Phys. 77, 711(1987): Hokkaido Univ. preprint, PPHOU86 OCT016
5) K. Ishikawa and T. Matsuyama, Yukawa Hall Kyoto preprint, RIFP-713
6) K. Ishikawa and T. Matsuyama, in preparation