一方 $\sum_{m=0} (-1)^m B_m = \chi$ はよく知られている。なぜ $M_m \gg B_m$ となるかというと，極値と極値を結ぶトンネル振巾が一般に存在するため（インスタントン効果）E＝0状態のエネルギーが変化（増大）して正確な零エネルギー状態の数は常に減少するためである。Witten によるとトンネル効果は常に m を一つだけ変化させインスタントンの配位はこうした二つの極値を結ぶ steepest descent の trajectory に相当する。負の固有値を m 個もつ極値での接平面（M_m 個ある）を合わせてベクトル空間 X_m をつくるとインスタントン効果は X_m と $X_{m\pm1}$ の間の写像を生成し，これより M の homology が再構成される。)

このように supersymmetric な系の低エネルギースペクトルは豊富な幾何学的情報を含んでいる。この関係を用いて supersymmetry を幾何学の問題に応用する事が考えられる。現在進行中の問題は，Virasoro 代数を super 化した super Virasoro 代数の表現論を用いて複素多様体論（K3 曲面や Calabi-Yau の多様体と呼ばれる種類の manifold で，1st Chern class $c_1 = 0$ という条件で特徴づけられるタイプのもの）の分析が進行中である（筆者もこうした研究をしている）。

以上，index 理論の introductory な議論を試みたがこうした方面を勉強しようと思われる方はぜひ有名な論文，

E. Witten, "Supersymmetry and Morse Theory", J. Diff. geom. 17, 611 (1982).

を参照される事をおすすめする。

場の量子論と index 定理

富山大・理　平　山　　実

index 定理が場の量子論に於いてどのように応用されているかを概観する。量子化されたディラック場 $\psi(x, t)$ が外場と相互作用しているとする。$\psi(x, t)$ は外場を含むディラック・ハミルトニアン $i\not{D}$ の固有値問題

$$i\not{D}\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x) \tag{1}$$

の解から

$$\psi(x, t) = \sum_{\lambda\geqq0} b_\lambda e^{-i\lambda t}\psi_\lambda(x) + \sum_{\lambda<0} d^{+}_{-\lambda} e^{-i\lambda t}\psi_\lambda(x) \tag{2}$$

のように構成される。b_λ や $d^{+}_{-\lambda}$ は適当な反交換関係を満たす演算子である。又，場の量子論的な真空を定義するに際しては有効作用

$$\Gamma = -\log\det i\not{D} \tag{3}$$

が用いられる。$\det i\not{D}$ は(1)で許されるすべての λ の無限積である。(2)や(3)に見られるように，量子化さ

れた場の量子論を摂動論を超えて論ずる為の第一歩は，$i\not{D}$ のスペクトルを知ることである。しかるに，外場が少しでも複雑になると(1)を直接調べてスペクトル $\{\lambda\}$ の全体を知ることは絶望的に困難になる。index 定理は $\{\lambda\}$ の中のゼロ固有値の分布に関して，外場の詳しい性質には依らない興味深い事実を示して呉れる。$i\not{D}$ のゼロ固有値の分布を知ることは解析学の問題であるが，これが外場の大域的性質に関連する幾何学的問題に帰着されると主張するのである。$i\not{D}$ と反可換な行列 γ_5 が存在するとして

$$V(\beta) = \mathrm{Tr}\{\gamma_5 \, e^{-\beta(i\not{D})^2}\} = \sum_\lambda e^{-\beta\lambda^2} < \psi_\lambda | \gamma_5 | \psi_\lambda > \tag{4}$$

とおく。Tr の循環性 $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ が成立する場合には $dV(\beta)/d\beta = 0$ を示すことが出来るので，特に

$$V(\infty) = V(0) \tag{5}$$

を得る。$V(\infty)$ は，(4)において $\beta \to \infty$ とすれば分るように，ゼロ固有値の分布に関する情報を担っている。一方，$V(0)$ は，(1)に基づく $V(\infty)$ の直接計算に比べれば格段に容易な計算法によって計算することができて，外場やその微分からなる項の全空間に亘る積分で表わされることになる。$V(\infty)$ のことを $i\not{D}$ の index と云い，(5)の関係を index 定理と云う。

・Eguchi, Gilkey, Hanson, Phys. Rep. **66** (1980) 213.

・Boose, Bleecker, *Topology and Analysis* (1985, Springer-Verlag).

index 定理の応用の具体的な例として 3 つの話題を採り上げる。

(a) Yang-Mills 場の方程式はインスタントン解と呼ばれる一群の解をもつが，最も一般のインスタントン解は何個の任意のパラメーターを含み得るだろうか。経路積分量子化法と組み合わせれば，この問題の答は量子色力学にとっても重要な知識をもたらすことになる。パラメーター κ を含むインスタントン解 $A(x, \kappa)$ に対して，$\phi(x) \equiv A(x, \kappa + \delta\kappa) - A(x, \kappa)$ とおけば，$\phi(x)$ はディラック型の一階微分方程式に従うべきことが導かれる。このディラック型方程式のゼロ固有値に属するモードの数が上述の問題の答になる。index 定理を援用してゼロ固有値の分布を調べることによりインスタントン解が最大限含み得る任意パラメーターの個数は 8 ×（インスタントン数）－ 3 であることが分る。

・Brown, Carlitz, Lee, Phys. Rev. **D16** (1977) 417.

・Madore, Phys. Rep. **75** (1981) 125.

(b) 量子化されたディラック場がゲージ場と相互作用している系は，anomaly と呼ばれる特異な量子論的現象を惹き起こすことがある。偶数次元時空間の場合の U(1)-anomaly や non-Abelian anomaly, 奇数次元時空間の場合の parity-anomaly 等がそれである。U(1)-anomaly が 1963 年の Atiyah-Singer の index 定理の局所的表現と見做せることは早くから知られていたが，non-Abelian anomaly は familie's index 定理（Atiyah-Singer, 1971 年）に関係している。境界を持つ時空上の index 定理（Atiyah-Patodi-Singer, 1973年）を併用すれば $2n+2$ 次元の場合の U(1)-anomaly と $2n+1$ 次元の場合の parity anomalyと$2n$次元の場合のnon-Abelian anomalyの間の関係を見出すことができる。これら3種のanomalyは，実は唯一つの位相不変量（$2n+1$次元の空間からゲージ群への写像のwinding number）に関連づけられるのである。

・Fujikawa, Phys. Rev. D21 (1980) 2848.

・Alvarez-Gaumé, Ginsparg, Nucl. Phys. B243 (1984) 449.

・Alvarez-Gaumé, Dietra, Moore, Ann. Phys. 163 (1985) 288.

・炭谷俊樹，素粒子論研究 71 (1985) 65.

(c) 空間がノン・コンパクトである場合には連続スペクトルが発生するので，(4)の$V(\beta)$がβに依存するようになる。(5)は$V(\infty)=V(0)+v$のように補正項vを必要とするようになる。物理的には$V(0)$はanomalyの積分に対応するがそれはもはやindex $V(\infty)$に等しくない。

同様のことは空間が境界をもつような場合にも起こる。$V(\infty)$を求めるには境界上に発生するモードも考慮しなければならず，それが補正項vを惹き起こす。当然のことながら，vの値は境界条件の取り方に依存する。2次元の電磁場とディラック場の系についての計算によると，物理的な境界条件を用いた場合には$V(\infty)=\mathrm{sgn}\,\Phi\cdot[|\Phi|]$，Atiyah-Patodi-Singerが採用した境界条件を用いた場合には$V(\infty)=[\Phi+\frac{1}{2}]$である。ここで$\Phi$は全磁束であり，$[a]$は$a$の整数部分である。いずれの場合も$\Phi$を連続的に変化させる時に，$V(\infty)$が階段状に変化することになる。

・Niemi, Semenoff, Nucl. Phys. B269 (1986) 131.

・Forgacs et al., Nucl. Phys. B293 (1987) 559.

以　上

(2＋1) 次元時空におけるスピンと統計

名大・理　大　貫　義　郎

I

3次元空間の中で，ある与えられたスピンをもつ同種粒子の統計的な性質が下の表1のようになっていることはよく知られている。

表1.

スピン	整　数	半　整　数
統　計	ボーズ，パラボーズ	フェルミ，パラフェルミ

この性質は，問題とする同種粒子が，(i)基本的な粒子または場から構成されたものであろうが，[1)2)3)] あ