Supersymmetryとindex理論

東大・理　江口　徹

§1. Supersymmetricな量子力学

相対論的場の理論においてさまざまな形のindex理論が現われるが，中でも最も自然で美しいものは超対称(supersymmetry)に関連したもののように思われる。ここでは最も簡単な場合，supersymmetricな量子力学を例にとって議論してみよう。

次の様な力学系を考える；まずsuperchargeと称する量Q_1，Q_2を

$$Q_1=\frac{1}{2}(\sigma_1 p+\sigma_2 W(x)),\quad Q_2=\frac{1}{2}(\sigma_2 p-\sigma_1 W(x)) \tag{1}$$

で定義する。pは運動量$-i\hbar\frac{d}{dx}$，σ_1，σ_2はPauli行列，W(x)はxの任意の関数としておく。Q_1, Q_2は2成分波動関数

$$\begin{pmatrix}\psi(x)\\ \varphi(x)\end{pmatrix} \tag{2}$$

に働く。次にsuperchargeの反交換子をとってハミルトニアンを定める

$$\delta_{ij}H=\{Q_i,Q_j\} \tag{3}$$

$$H=\frac{1}{2}(p^2+W(x)^2)+\frac{1}{2}\hbar\sigma_3\frac{dW}{dx} \tag{4}$$

(3)より$\frac{1}{2}H=Q_1^2=Q_2^2$の形をしているのでそのスペクトルEは零ないし正の値をとる，$E\geqq 0$。

超対称性をもつ系ではこのようにエネルギー固有値がいつも半正定値であるが，特にその基底状態，E＝0のstatesに面白い現象がひそんでいる。

E＝0の状態を探すため，まず(4)の第2項を無視するとE＝0の波動関数はW(x)の零点のまわりに集中する事がわかる。そこでW(x)をその零点x_0のまわりで展開して

$$W(x)=\lambda(x-x_0)+\cdots \tag{5}$$

とする。(5)の高次の項を無視して(4)に代入すると

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\lambda^2(x-x_0)^2)+\frac{1}{2}\hbar\lambda\sigma_3. \tag{6}$$

第1項は調和振動子，第2項は固有値$\pm\frac{1}{2}\hbar\lambda$をとる。したがってスペクトルは

$$E_n=\hbar|\lambda|(\frac{1}{2}+n)\pm\frac{1}{2}\hbar\lambda. \tag{7}$$

そこで零エネルギーの波動関数は

$$\begin{cases} \lambda>0 & \begin{pmatrix} 0 \\ f(x-x_0) \end{pmatrix}, \quad (8) \\ \lambda<0 & \begin{pmatrix} f(x-x_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9) \end{cases}$$

f (x) は調和振動子の基底状態の波動関数。今，σ_3 をフェルミオン数を数えるオペレーターとみなし，$\sigma_3=+1$ の状態はフェルミオン数 1，$\sigma_3=-1$ の状態はフェルミオン数が零（即わちボソニック）と思うと $\lambda>0$ の零エネルギー状態 (8) は boson $\lambda<0$ の零エネルギー状態 (9) は fermionとみなせる。1図参照。

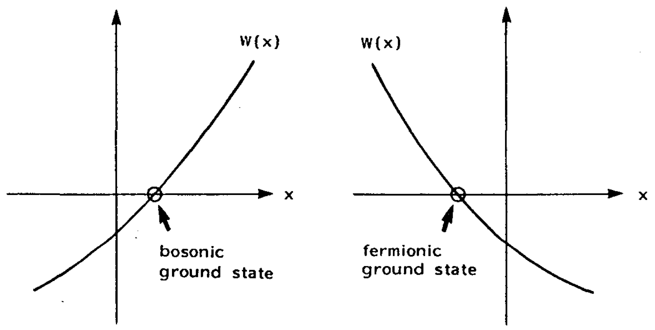

図1 (a)　　図1 (b)

今までの議論は近似計算だったが，零エネルギー状態の存在に関しては厳密な結果を導く事ができる。このためには波動方程式

$$Q_1\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix}=0 \tag{10}$$

をといて

$$\begin{pmatrix}\psi(x)\\ \varphi(x)\end{pmatrix}=\exp\left(\int_0^x dx'\frac{1}{\hbar}W(x')\sigma_3\right)\begin{pmatrix}\psi(0)\\ \varphi(0)\end{pmatrix} \tag{11}$$

$\frac{1}{2}H=Q_1^2$ なのでこの解は当然 $E=0$ を与える。W(x) がどのような条件をみたす時 (11) が normalizable な波動関数になるかを見てみる。W(x) が

1. $|x|\hbar$ で x^{2n} のようにふるまう場合 W(x) は偶数個の零点をもつが $\int^x W(x')dx'\approx x^{2n+1}$ となり σ_3 の固有値± 1 いずれをとっても (11) は規格化できず，acceptable な波動関数とはならない。従ってこの場合零エネルギー状態は存在しない。
2. $|x|\hbar$ で W(x) が λx^{2n-1} のようにふるまう場合 W(x) は寄数個の零点をもつ。$\int^x W(x')dx'\approx\lambda x^{2n}$。したがって $\lambda>0$ なら $\begin{pmatrix}0\\ \varphi(x)\end{pmatrix}$ の形の bosonic な波動関数，$\lambda<0$ なら $\begin{pmatrix}\psi(x)\\ 0\end{pmatrix}$ の形の fermionicな波動関数で規格化可能なものが存在する。

このように零エネルギー状態の存在，非存在は W(x) の detail によらずその漸近形にしかよらない。今，supersymmetry index, 通称 Witten index を

$$\mathrm{tr}(-1)^F \tag{12}$$

で定義する。ここで F は状態に含まれるフェルミオン数((4)のモデルでは σ_3)，tr はハミルトニアンの全固有状態についての和である。(12) は実は

$$\mathrm{tr}(-1)^F = n_B(E=0) - n_F(E=0) \tag{13}$$

となる。ここで n_B，$n_F(E=0)$ は bosonic な零エネルギー状態の数と fermionic な零エネルギー状態の数を表わす。(13) を出すには次のように考える。今ハミルトニアンの零でない固有値 $E \neq 0$ の固有状態 $|b\rangle$があったとする。これに supercharge Q (Q_1，Q_2 どちらでもよい。めんどうなので 1 種類しかなかったとする) をほどこすと新しい状態 $|f\rangle$ が作られる

$$|f\rangle = Q|b\rangle \tag{14}$$

($|f\rangle = 0$ とはなれない。なぜなら $\langle f|f\rangle = \langle b|H|b\rangle = E \neq 0$)
ところで

$$\{Q_i, \sigma_3\} = 0 \tag{15}$$

なので supercharge はフェミルオンをボソンへボソンをフェルミオンへと交換する。$|b\rangle$がボソンなら$|f\rangle$はフェルミオン。したがって零でないエネルギー準位はボソンとフェルミオンとが必ず対になって現われ $\mathrm{tr}(-1)^F$から脱落する。この結果零エネルギー準位のみが寄与するため (13) が得られる。supersymmetric 量子力学では Witten index が potential の漸近形にしかよらぬ一種の断熱不変量である事がわかったが，座標 x が実軸上に値をとる通常の場合を拡張して多様体 M の上に値をとる場合，non-linear σ-模型を考えると Witten index は M の topological な不変量に直接関係する。

§2. Supersymmetric 非線型 σ-模型

Riemann 多様体 M を考えてその座標を φ_i ($i=1\sim n$)，計量を g_{ij}，曲率テンソルを R_{ijkl} とする。次のようなラグランジアンを考える。

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j} g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} + \bar{\psi}^i i\frac{D}{Dt}\psi^j + \frac{1}{4}R_{ijkl}\bar{\psi}^i\psi^k\bar{\psi}^j\psi^l\right\} - g^{ij}\frac{\partial h(\varphi)}{\partial\varphi^i}\frac{\partial h(\varphi)}{\partial\varphi^j} - \frac{D^2 h}{D\varphi^i D\varphi^j}\bar{\psi}^i\psi^j \tag{16}$$

ψ^i はスピノル場 D/Dt 等は共変微分をあらわす。これは supersymmetric 非線型 σ-模型の標準的なラグランジアンで，大ざっぱにいって (16) の第 1 項 ({　} にかこまれた項) が supersymmetric 量子力学

(4) の運動量項 p^2, あとの2項が $W(x)^2$ と $\frac{dW}{dx}$ の項に対応する。h は φ の関数で super-potential と呼ばれるものであるがWの時の零点はhでは極値に対応する。$\frac{dW}{dx}$ の項にかかる σ_3 を以前はフェルミオン数と解釈したが(16)では実際 $\bar{\psi}\psi$ が現われている。

さて系(16)の零エネルギー状態をさがしてみよう。以前と同じように零エネルギー状態の波動関数はhの極値に集中する。今, $h = ch_0$ (cはconstant)としcを除々に大きくしてゆくように考えると波動関数はc大で極値の極く近くにしか値をもたなくなるのでそれぞれの極値のまわりで別々に system を考察できる。hとしては通例 height function と呼ばれるものを考える。これは多様体Mをある平面の上においた時そこから計った高さで定義される。第2図では8つの極値が存在する。

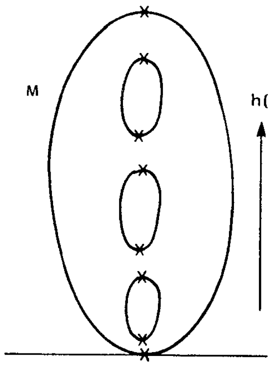

図2

supersymmetric 量子力学ではWの零点でのWのこう配の符号が問題になった。ここではhの極値における2次微係数の符号が問題になる。行列 $D^2h/D\varphi_i D\varphi_j$ のi番目の極値における負の固有値の数を m_i としよう。supersymmetric 量子力学では $\frac{dW}{dx}$ の符号が負だとフェルミオン数が1の状態ができた。これと同様にしてhの2階微分の負の固有値の数がmの極値ではフェルミオン数がmの状態ができる(今は $n = \dim M$ 種類のフェルミオンがある。1種類のフェルミオンはもちろん1個以上つめない)。すると Witten index は, 全ての極値の寄与をあわせて

$$\mathrm{tr}(-1)^F = \sum_i (-1)^{m_i} \tag{17}$$

ところでこれは Morse 理論の基本定理から

$$\sum_i (-1)^{m_i} = \chi(M) \tag{18}$$

$\chi(M)$ はMの Euler 数となる。したがって Witten index はこの場合多様体Mの Euler 数と一致する。(上の議論では, 負の固有値の数がm個の極値にm個のフェルミオンがつまるので, 極値の付近に support をもつm次の調和微分形式があるようにみえる。負の固有値の数がmの極値の数を M_m とするとこれはm次の Morse index と呼ばれるものであるが, M_m は正確にはm次の Betti 数 B_m (m次の調和微分形式の数)とは異なりこれよりは常に大きい $M_m \gg B_m$ (Morse の不等式)。より正確にはzを不定元として

$$\sum_{m=0}^{n} M_m z^m - \sum_{m=0}^{n} B_m z^m = (1+z)\sum_{m=0}^{n} Q_m z^m \tag{19}$$

が成り立つ。Q_m は非負整数。(19)で $z = -1$ とおくと

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m B_m = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m M_m = (m = \text{even の極値の数}) - (m = \text{odd の極値の数})$$

$$= \sum_i (-1)^{m_i} \tag{20}$$

一方 $\sum_{m=0} (-1)^m B_m = \chi$ はよく知られている。なぜ $M_m \gg B_m$ となるかというと，極値と極値を結ぶトンネル振巾が一般に存在するため（インスタントン効果）E＝0状態のエネルギーが変化（増大）して正確な零エネルギー状態の数は常に減少するためである。Wittenによるとトンネル効果は常にmを一つだけ変化させインスタントンの配位はこうした二つの極値を結ぶsteepest descentのtrajectoryに相当する。負の固有値をm個もつ極値での接平面（M_m個ある）を合わせてベクトル空間 X_m をつくるとインスタントン効果は X_m と $X_{m\pm1}$ の間の写像を生成し，これよりMのhomologyが再構成される。)

このようにsupersymmetricな系の低エネルギースペクトルは豊富な幾何学的情報を含んでいる。この関係を用いてsupersymmetryを幾何学の問題に応用する事が考えられる。現在進行中の問題は，Virasoro代数をsuper化したsuper Virasoro代数の表現論を用いて複素多様体論（K3曲面やCalabi-Yauの多様体と呼ばれる種類のmanifoldで，1st Chern class $c_1=0$ という条件で特徴づけられるタイプのもの）の分析が進行中である（筆者もこうした研究をしている）。

以上，index理論のintroductoryな議論を試みたがこうした方面を勉強しようと思われる方はぜひ有名な論文，

E. Witten, "Supersymmetry and Morse Theory", J. Diff. geom. 17, 611 (1982).

を参照される事をおすすめする。

場の量子論とindex定理

富山大・理　平　山　　実

index定理が場の量子論に於いてどのように応用されているかを概観する。量子化されたディラック場 $\psi(x, t)$ が外場と相互作用しているとする。$\psi(x, t)$ は外場を含むディラック・ハミルトニアン $i\not{D}$ の固有値問題

$$i\not{D}\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x) \tag{1}$$

の解から

$$\psi(x, t) = \sum_{\lambda\geqq0} b_\lambda e^{-i\lambda t}\psi_\lambda(x) + \sum_{\lambda<0} d^+_{-\lambda} e^{-i\lambda t}\psi_\lambda(x) \tag{2}$$

のように構成される。b_λ や $d^+_{-\lambda}$ は適当な反交換関係を満たす演算子である。又，場の量子論的な真空を定義するに際しては有効作用

$$\Gamma = -\log\det i\not{D} \tag{3}$$

が用いられる。$\det i\not{D}$ は(1)で許されるすべての λ の無限積である。(2)や(3)に見られるように，量子化さ