である。

２次元ペンローズ格子の電子状態を特徴付ける力学系は，まだ知られていない。それを見出す事が，今後の課題の１つである。

1) P. A. Kalugin, A. Yu. Kitaev and L. S. Levitov Sov. Phys. JETP **64** (1987) 410.

ホモトピー群を用いた環欠陥の分類とそのエネルギー安定性

慶大・理工　中西　秀，森　弘之

§序

ホモトピー論を用いた秩序状態の欠陥の分類に関しては，既にいくつかの総合報告が出ている。[1-4] それによると，線欠陥や点欠陥の型は，各々，秩序変数を表わす位相空間X（秩序変数空間）の１次元，及び２次元ホモトピー群を用いて分類されることが知られている。我々は，この理論を拡張して，線欠陥がループになった環欠陥の分類のホモトピー論を展開する。また，環欠陥を考えることにより，トポロジカルに安定な点欠陥が必ずしもエネルギー的に安定とは限らないことを示す。

§線欠陥と点欠陥の分類

環欠陥の分類を行なう前に，ホモトピー論を用いた線欠陥と点欠陥の分類の復習をしておこう。

線欠陥が１本入った状態の秩序変数の配位は，数学的には全空間 R^3（３次元ユークリッド空間）から直線Ｌを除いた空間より，秩序変数空間Ｘへの写像と考えることができる。この写像の族の連結成分の集合（ホモトピー集合）が，線欠陥の型と１対１に対応しているのであるが，これを数学の記号を用いて $[R^3-L;X]$ と書く。さらに，この $[R^3-L;X]$ は，円周 S^1 からＸへの写像のホモトピー集合 $[S^1;X]$ と集合として一致することが知られている。これを R^3-L と S^1 はホモトピー同値であるという。

このホモトピー集合 $[S^1;X]$ は，基点を定めた１次元ホモトピー群 $\pi_1(X,*)$ の共役類の集合に一致する。即ち，線欠陥の型は秩序変数空間Ｘの一次元ホモトピー群の共役類によって特徴づけられる。また線欠陥の合成則も群の演算に対応していることも知られている。

同様に点欠陥のある秩序変数の配置は $[R^3-P;X]$ に対応している。但しＰは R^3 内の１点を表わすものとする。R^3-P と球面 S^2 がホモトピー同値であることに注意すると，点欠陥の型は $[S^2;X]$ の元に対応していて，それはさらに２次元ホモトピー群 $\pi_2(X,*)$ の π_1 による自己同型類に対応していることが知られている。即ち，点欠陥の型は，２次元ホモトピー群の π_1 による自己同型類によって特徴づけられる。

§環欠陥の分類

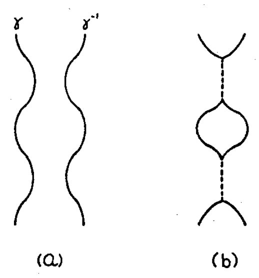

図1

まず，環欠陥が物理的にどのような状況で現われるかを考える。π_1の互いに逆元で表わされるような線欠陥が近づく時，一部が接触して欠陥が消えているが，他の部分は未だ融合していない状態では環欠陥が残される。このように，環欠陥は局所的構造としては線欠陥と同じ構造をしている。しかしながら，線欠陥のように無限遠まで拡がっておらず，点欠陥のように局在した欠陥である。このように環欠陥は，線欠陥と点欠陥の２つの性質を兼ね備えている。[3)]

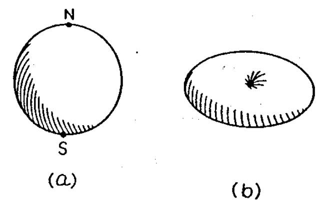

図2

１つの環欠陥を含む秩序変数の配位も，線欠陥や点欠陥の場合と同様に，ホモトピー集合［$R^3-\Sigma$;X］によって分類される。[5)]但しΣはR^3中の環欠陥の特異領域とする。$R^3-\Sigma$にホモトピー同値な閉曲面は，球面上の２点N，Sを１点に縮めたもの（Wと書く）なので［W;X］を考えればよい。（図２）

これに群構造を導入する為に基点を定めて［W,＊;X,＊］を考えこれをτ_2(X,＊)と書く。すると，τ_2はπ_1とπ_2の半直積群と同型になり，［W;X］はτ_2のπ_1による自己同型類となることが示される。[5)] 即ち環状欠陥の型はτ_2のπ_1による自己同型類によって分類される。τ_2がπ_1とπ_2の半直積群になることは，環欠陥の２面性の１つの表現である。

環状欠陥は，その半径がゼロになると点欠陥になる。どの環状欠陥が，どの点欠陥になるかはWで１点に縮んだ２点を再び２点に分けることに相当する$\tau_2\to\pi_2$の射像を考えればよい。それによると$(\gamma, n)\in\tau_2$は$\gamma(n)\in\pi_2$になることが示される。但し$\gamma\in\pi_1$，$n\in\pi_2$，$\gamma(n)$はnに対するγの作用を表わす。$\gamma(n)$はnと同じ自己同型類に属するので，(γ, n)で表わされる環欠陥は，縮んだ時nで表わされる点欠陥になる。[5)]

また，環欠陥は，他の欠陥がその中を通り抜けることができるが，その変形は閉曲面W上の連続変形としては定義できず，環欠陥を囲むトーラス上の連続変形となる。そのような変形を許すと，環欠陥は，τ_2の同じ共役類に属するτ_2の元で特徴づけられている他の型に移ることが示される。[5)]

§点欠陥及び環欠陥のエネルギー安定性

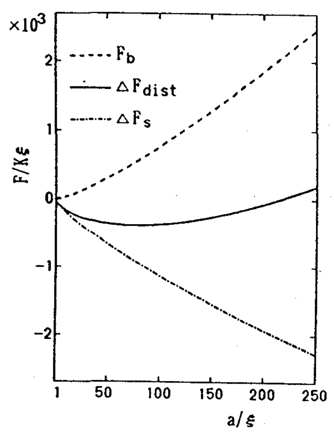

図3

一般に点欠陥の１つの型に対して複数の準安定な構造が存在し，$\xi^3\triangle f$程度のエネルギー障壁によってそれら相互の移行が可能と考えられている。しかし，型の異なる欠陥相互の移行に対しては，表面からの欠陥の出入りを除けば，系の大きさに比例するエネルギー障壁があり，特にトポロジカルに安定な欠陥は，エネルギー的にも非常に安定と考えられてきた。[6)] しかしながら，前節で見たように環欠陥は半径をゼロにすることにより点欠陥に連続的に移行する。このことは，逆の過程，即ち，点欠陥が環欠陥に拡がり，もしその半径が無限大になれば欠陥のない構造に

連続的に移行する過程があることを示している。言いかえると，トポロジカルに安定な点欠陥のエネルギー安定性は必ずしも保証されていない。実際，ネマティック液晶のひずみエネルギーを環欠陥の半径でプロットしてみると，有限の半径で最小になり（図3実線）[7]，これは実験的にも示唆されている。[8]

参考文献

1) N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1976) 591.
2) L. Michel, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 617.
3) V. P. Mineev, Sov. Sci. Rev. **A2** (1980) 173.
4) H. R. Trebin, Adv. Phys. **31** (1982) 195.
5) H. Nakanishi, K. Hayashi, and H. Mori, to be published in Commun. Math. Phys.
6) See Sec. IIB of 1).
7) H. Mori and H. Nakanishi, Submitted in J. Phys. Soc. Jpn.
8) D. Melzer and F.R.N. Nabarro. Phil. Mag. **35** (1977) 907.

トポロジカルな欠陥の運動

東工大・理　北　原　和　夫

I. 序　論

欠陥を含む媒質の変形を扱う場合，完全結晶から出発して物体の変形を変位ベクトル$\vec{u}$で表現する。近接する2点$\vec{x}$と$\vec{x}+d\vec{x}$の変位の差$d\vec{u}$より歪み$w_{ik}=\partial u_k/\partial x^i$を定義する。しかしながら，このような歪みを用いた記述が可能なのは完全結晶と変形媒質との間に大域的な一対一対応がある場合に限られる。

転位や回位を含む変形媒質では，局所的には完全結晶との対応はあるが大域的にはない。この微分幾何学的な扱いについては昨年の研究会で述べた。第Ⅱ章でその復習をし，第Ⅲ章以下で変形媒質の運動方程式を導く。Dzyaloshinskii-Volovick[1]に従って変形媒質の場に対する正準方程式を導く。

Ⅱ. 変形媒質の幾何学

変形した媒質中の一点Pにおいて歪んだ結晶軸が存在するとして，それらを$\hat{e}_\alpha$（$\alpha=1, 2, 3$）であらわす。$\hat{e}_\alpha$は隣りあう原子間の相対位置を表すものと考えればよい。局所的な伸び縮みがあれば完全結晶の場合と較べて$\hat{e}_\alpha$は歪んでいる。外の実験室に固定したデカルト座標軸$\hat{u}_i$（$i=x, y, z$）によって媒質内の点Pの位置を

$$\vec{x}=x^i\hat{u}_i \tag{1}$$