

研究会報告

となって、確かに従来の結果<sup>1, 3)</sup>に一致する。この式(4)の妥当性は Vicsek forest (Vicsek snow-flake の半分)<sup>7)</sup> や DLD<sup>2, 3)</sup> について実証済みである。

全体のパターンがコンパクトの時には、 $D=d$  だから(3)式は

$$\tau = 2 - \nu_{||} (d - d_s) \quad (5)$$

となる。更に通常よくシミュレーションに採用されるように  $d_s = d - 1$  とすると

$$\tau = 2 - \nu_{||} \quad (6)$$

という簡略な形が導かれる。ballistic deposition<sup>6)</sup> や下地からの Eden 成長<sup>6)</sup> Scheidegger の河川網のモデル<sup>4-6)</sup> などがこの場合に該当し、ごく最近の Meakin によるシミュレーション<sup>6)</sup> では(6)式がよく成立している。なお、Scheidegger のモデルに対しては任意の次元  $d$  で(6)式が成り立つことも示せる。

今後の課題としては  $\eta$  モデルや分枝なしの DLD, フラクタル下地上への凝集, invasion percolation など数々の問題についての(3)式の妥当性やそれらの universality class による分類の問題が考えられる。以上に関連した実験も可能であり、大変興味深い。

## 参 考 文 献

- 1) Z. Rácz and T. Vicsek: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2382.
- 2) P. Meakin: Phys. Rev. B **30** (1984) 4207.
- 3) M. Matsushita, Y. Hayakawa and Y. Sawada: Phys. Rev. A **32** (1985) 3814.
- 4) H. Takayasu and I. Nishikawa: *Proc. of 1st Int. Symp. for "Science on Form"*, ed. S. Ishizaka (KTK Sci. Pub., Tokyo, 1986) p. 15.
- 5) H. Kondoh, M. Matsushita and Y. Fukuda: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 1913.
- 6) P. Meakin: preprint (1987).
- 7) Z. Rácz and T. Vicsek: in *Kinetics of Aggregation and Gelation* ed. F. Family and D. P. Landau (North-Holland, Amsterdam, 1984) p. 255.

## 7. DLAに関連した2つの話題—枝の大きさ分布とコヒーレント異常法

神戸大・理 高安秀樹, 高安美佐子, 中村隆志

前半の話題は、フラクタルにおいてよく現われるべき分布を安定分布の立場から統一的に議論し、なぜべき分布が実現するのかを示し、さらにそのべきの指数とフラクタル次元との関係を明らかにする。後半は、最近、幾つかの臨界現象において優れた結果を出し注目を集めているコヒーレント異常法の考え方を $\eta$ -モデルに適用した結果を報告する。

前半。フラクタル的な性質を持つクラスターには、全体の大きさ  $N$  と表面  $S$  の間に

$$S \propto N^\alpha \quad (1)$$

という関係が平均的に成立する。このときの指数  $\alpha$  は、クラスターのフラクタル次元、および、表面の次元をそれぞれ  $D$ 、 $D_s$  とすれば

$$\alpha = D_s / D \quad (2)$$

によって与えられる。今、表面が  $S$  であるようなクラスターの大きさを  $N_s$  と表わすことにする。フラクタル的なクラスターの多くは、1カ所あるいは高々表面の数に比べて無視しうる数の場所を切断することによって2つのクラスターに分裂する。分裂する前の表面の大きさを  $S$ 、分裂した後の表面の大きさを  $S_1$ 、 $S_2$  とすれば、 $S = S_1 + S_2$  を満たす。

表面が  $S_1$  のクラスターの大きさ  $N_{s1}$  は、表面が  $S$  のクラスターから  $S_2$  のクラスターを引き去ったもの  $N_s - N_{s2}$  とみなすことができるので、次の関係式が成立しなければならない。

$$N_{s1} \stackrel{d}{=} N_{s1+s2} - N_{s2} \quad (3)$$

ここで  $\stackrel{d}{=}$  は両辺の分布が等しいことを示す。また、 $S$  を  $a$  倍するスケール変換をするとフラクタル性より  $N$  は  $a^{1/\alpha}$  倍されるので、次式を満たす。

$$N_{aS} \stackrel{d}{=} a^{1/\alpha} N_s \quad (4)$$

(3)、(4) を同時に満足するような確率変数は確率論において知られているように特性指数が  $\alpha$  の安定分布でなければならない。  $N_s$  が正の数であることを考慮にいれば、 $N_s$  の関数型は次のように唯一に決まってしまう。

$$P(N) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\zeta e^{-i\zeta N - (c\zeta)^\alpha} \cdot e^{-\pi\alpha/2} \quad (5)$$

ガウス分布以外の安定分布がすべてそうであるように  $N_s$  の分布はべき乗のテイル

$$P(\geq N_s) \propto N_s^{-\alpha} \quad (6)$$

を持つ。このテイルの指数は  $S$  には依存しないので、大きなクラスターからランダムに切り取られるクラスターの大きさ分布は (6) 式のようなテイルを持つことになる。

D L A のような単連結な分岐構造の場合には構造上で長さを測る広がり次元によって構造の次元  $D$  が与えられ、表面の広がり次元  $D_s$  は、 $D - 1$  によって与えられる。したがって、

$$\alpha = (D - 1) / D \quad (7)$$

となる。平面上の D L A の場合、 $D = 1.67$  であることが知られているが、その値から決まる  $\alpha$  の値は、 $0.40$  となる。D L A の構造上の 1 点をランダムに選らんで切断したときに生じる枝の大きさ分布を実際に調べてみると確かにべき分布となり、指数はおよそ  $0.38$  で、理論による予想とよく一致している。Cayley tree や Viscek fractal のような規則的な分岐構造に対しては解析的に  $D$  と  $\alpha$  を独立に計算することができるが、いずれの場合にも (7) 式を満足する。

上記の議論はパーコレーションクラスターの場合にも適用できる。パーコレーションクラスターは多重連結の部分もあるが、測度、あるいは、構造の次元に寄与する部分はダングリグクラスターと呼ばれている単連結なクラスターであることが知られている。1 点の切断によって切り取られるダングリグクラスターの大きさ分布は、臨界点では孤立したクラスターの大きさ分布に一致すると期待される。臨界点を越えたときにはクラスターの次元がユークリッド空間の次元  $d$  と一致することから、パーコレーションクラスターの場合には  $D_s$  を余次元  $d - D$  とすればよいことが導かれる。したがって、

$$\alpha = (d - D) / D \quad (8)$$

が得られる。この結果は、臨界指数の間に成立すると思われているハイパースケーリング関係と一致する。

後半。CAM は、有限の領域を平均場的な近似法で解き、近似の度合いを変えた時の係数の変化の様子から無限系の振舞いを推定する方法で、磁性体やパーコレーションにおいて優れた結果を出している。D L A の問題、あるいは、 $\kappa$ -モデルのような時間をあら

わに含む様な系に対するCAMの方法は、まだ確立していない。ここでは、Edenモデルを $\eta$ -モデルの平均場近似として考える立場から解析する。 $\eta$ -モデルは、ラプラス方程式を満たすような場 $\phi$ の中でクラスターが $|\nabla\phi|^\eta$ に比例した確率でランダムに成長するようなモデルで、 $\eta=1$ の場合にDLAモデルと等価になる。ラプラス場は無限の到達力を持っている場であり、それがフラクタル構造を作るのに本質的な役割をしている。ここでは力の到達範囲を有限の大きさ $L$ に制限したようなモデルを考え、それを $\eta$ -モデルの第 $L$ 近似とみなすことにする。すなわち、場 $\phi$ が次の方程式を満たすような $\eta$ -モデルを考える。

$$(\Delta - L^{-2})\phi = 0 \quad (9)$$

$L \rightarrow 0$ の極限では相互作用の到達範囲はゼロになり、Edenモデルと一致する。 $L$ が有限の場合には距離が $L$ 以上離れた2点間には相関がなくなるので、得られる空間パターンは図1の様に距離 $L$ 程度の隙間のあいた分岐構造が得られる。このパターンはフラクタルではなく、大きなスケールで観測すればEdenモデルのようにコンパクトな構造を持っている。すなわち、半径が $r$ の円の中に含まれるパターンの大きさを $N(r)$ としたとき、十分大きな $r$ に対してこの量は $r^d$ に比例することになる( $d$ は空間の次元)。したがって、密度に対応する比例係数を $A(L)$ とおくと、

$$N(r) = A(L) r^d \quad (10)$$

とおくことができる。もともとの $\eta$ -モデルは、 $L = \infty$ の場合になが、そのときには $N$ はフラクタル的な振舞い

$$N(r) \propto r^D \quad (11)$$

を示すはずである( $D$ はフラクタル次元)。CAMの考え方は、係数 $A(L)$ の $L$ 依存性から $L = \infty$ での $N(r)$ の振舞いを補正しようとするもので、この場合次のように考えることができる。 $A(L)$ は平均密度に対応しているので、 $L$ が大きくなるにつれて値は小さくなる。そこでその $L$ 依存性を次のようなべき乗則にしたがうものと仮定する。

$$A(L) \propto L^{-\psi} \quad (12)$$

空間のスケールが $L$ よりも小さいところでは、近似によって得られるパターンともともとの $\eta$ -モデルによって得られるパターンはほとんど同じものになるはずなので、 $N(r)$ は $r$ が $L$ 程度の大きさまでは $L = \infty$ の $N$ と一致するはずである。したがって、 $r \sim L$ のと

ここで考えると、

$$N(r) \propto L^{-\psi} r^d \propto r^{d-\psi} \quad (13)$$

が成り立つはずなので、フラクタル次元  $D$  は

$$D = d - \psi \quad (14)$$

によって与えられることになる。

幾つかの  $L$  と  $\eta$  について数値シミュレーションによって  $N(r)$  を調べてみた結果、 $A$  の  $L$  依存性は、実際にべき乗になっていることが確かめられた。そのべきの指数から見積もった  $D$  の値は、 $\eta$  が 0.5、1、2、4 のとき、それぞれ 1.88、1.70、1.58、1.35 となった。これらの値は、これまでに知られている数値シミュレーション、次元解析、繰り込み群などによる結果と比べてもほぼ妥当な値となっている。このことから、CAM の考え方が  $\eta$ -モデルのような成長モデルに対しても有効であることが確認されたと言える。

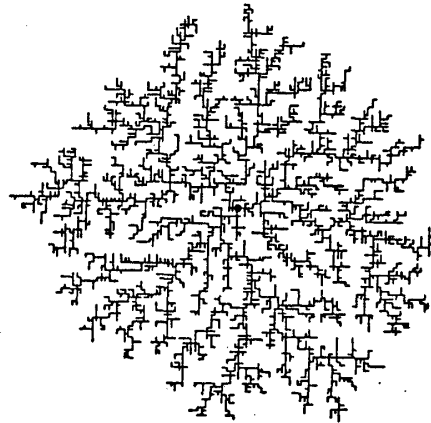


図 1.  $\eta = 1$ ,  $L = 6$  の場合のパターンの例。

## 8. カオティック・ダイナミクスの multifractal 構造

静岡大・教養 佐藤 信一

### 1. はじめに

フラクタル次元という尺度により自然界に見られる様々なランダム・パターンを定