in disorolered materials, Geilo,·Norway (1987).
5) K. Kawasaki, 19th Yamada Conference on Ordering and Organization in Ionic Solutions (Nov. 1987, Kyoto).
6) T. Nagai, K. Kawasaki and K. Nakamura, in Dynamics of Ordering Processes in Condensed Matter, eds S. Komura and H. Furukawa, Plenum. Press.
7) 長井達三，川崎恭治，中村勝弘，日本物理学会誌解説

6. 自己アフィン・フラクタルとクラスター統計

中大・理工　松 下　貢

§1. はじめに

d次元空間内でd_s次元の下地(Substrate; $d_s<d$)からパターンが成長するような状況を考える。例えば，２次元平面上に線状に並んだ種粒子($d_s=1$)に対する拡散律速型の凝集(diffusion-limited deposition-DLD)や，下地平板($d_s=2$)への通常の蒸着などがその例である。このような場合には単にパターンの全体的構造だけでなく，それを構成する個々のクラスターの構造やその統計が議論の対象となり得る。しかも，パターン形成の経緯から考えてこれら３者は密接な関係があるはずである。事実，全体のパターンとそれを構成する個々のクラスターとが同じフラクタル次元を持つ自己相似フラクタルの場合についてはこの関係は既に議論されている。[1-3]

ここでは個々のクラスターが自己アフィン・フラクタルである場合に議論を拡張する。単純な拡張だが，これまでなされた数多くのシミュレーションを驚く程すっきりと統一的にまとめることができ，かつ多くの今後の課題が見えて来る。

§2. 自己アフィン・クラスター

s個の粒子からなる個々のクラスターの下地から測ったrms高さh_s，及びそれに垂直なrms幅w_sが

$$h_s \sim s^{\nu_{\parallel}} \tag{1a}$$

$$w_s \sim s^{\nu_{\perp}} \tag{1b}$$

とスケールされるものと仮定する。$\nu_{\parallel}=\nu_{\perp}=\nu\ (=D^{-1})$の時にはクラスターは自己相似(そ

のフラクタル次元が D ）ということになる。ballistic deposition, Eden 成長, Scheidegger の河川網など多くのモデルに現れるクラスターが実際に $\nu_{\parallel} \neq \nu_{\perp}$ を満たし，（1a，b）で特徴づけられる自己アフィン・フラクタルであることがわかりつつある。[5,6]

§3. クラスターのサイズ分布関数

今，下地の単位面積当りに付着した粒子数の平均値を N とし，クラスターのサイズ分布関数（下地の単位面積当りサイズ s のクラスターが見出される確率）を $n_s(N)$ とする。これに対して次のような2指数スケーリング形

$$n_s(N) \sim s^{-\tau} f(s^{\sigma}/N) \tag{2}$$

を仮定する。ここで $f(x)$ は cut-off 関数で，$f(x) \cong 1\ (x \ll 1)$，$0\ (x \gg 1)$ を満たす。

パターン形成の経緯を考えると，どのスケールで見てもクラスター同志の競争で勝ち残った少数のクラスターが成長してそのスケールで見たスペースを占領するということが起こるので，(2)は物理的には非常にもっともらしい仮定なのである。

§4. スケーリング則

全体のパターンのフラクタル次元を D とおく。この全体のパターンについての全粒子数に関する sum rule 及び下地からの rms 高さの表式に(1)，(2)を使うと次のスケーリング関係式

$$\tau = 2 - \nu_{\parallel}(D - d_s) \tag{3}$$

が導かれる。これが目標の式である。

(3)式に $\nu_{\parallel}$ が現れて $\nu_{\perp}$ がない理由は，上述したようにサイズ分布が成長の過程でのクラスター相互の競争によって決まり，その勝ち負けは専ら下地からの高さで規定されるからである。[勿論，個々の問題によって必ず $\nu_{\parallel}$ と $\nu_{\perp}$ との間にモデルに依存した関係式が存在するはずだから，$\nu_{\parallel}$ の代りに $\nu_{\perp}$ で書けないことはない。]

§5. 議　論

全体のパターンと個々のクラスターとが同じ自己相似なフラクタル構造を持つ場合には $\nu_{\parallel} = \nu_{\perp} = \nu = D^{-1}$ だから，(3)式は

$$\tau = 1 + \frac{d_s}{D} \tag{4}$$

となって，確かに従来の結果[1,3]に一致する。この式(4)の妥当性は Vicsek forest (Vicsek snow-flake の半分)[7]や DLD[2,3]について実証ずみである。

全体のパターンがコンパクトの時には，$D=d$ だから(3)式は

$$\tau = 2 - \nu_{\parallel}\,(d - d_s) \tag{5}$$

となる。更に通常よくシミュレーションに採用されるように $d_s = d-1$ とすると

$$\tau = 2 - \nu_{\parallel} \tag{6}$$

という簡略な形が導かれる。ballistic deposition[6] や下地からの Eden 成長,[6] Scheidegger の河川網のモデル[4-6]などがこの場合に該当し，ごく最近の Meakin によるシミュレーション[6]では(6)式がよく成立している。なお，Scheidegger のモデルに対しては任意の次元 d で(6)式が成り立つことも示せる。

今後の課題としては η モデルや分枝なしの DLD，フラクタル下地上への凝集，invasion percolation など数々の問題についての(3)式の妥当性やそれらの universality class による分類の問題が考えられる。以上に関連した実験も可能であり，大変興味深い。

参　考　文　献

1) Z. Rácz and T. Vicsek: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2382.
2) P. Meakin: Phys. Rev. B **30** (1984) 4207.
3) M. Matsushita, Y. Hayakawa and Y. Sawada: Phys. Rev. A **32** (1985) 3814.
4) H. Takayasu and I. Nishikawa: *Proc. of 1st Int. Symp. for "Science on Form"*, ed. S. Ishizaka (KTK Sci. Pub., Tokyo, 1986) p. 15.
5) H. Kondoh, M. Matsushita and Y. Fukuda: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 1913.
6) P. Meakin: preprint (1987).
7) Z. Rácz and T. Vicsek: in *Kinetics of Aggregation and Gelation* ed. F. Family and D. P. Landau (North-Holland, Amsterdam, 1984) p. 255.

7.　DLAに関連した2つの話題－枝の大きさ分布とコヒーレント異常法

神戸大・理　　高安秀樹，高安美佐子，中村隆志