

研究会報告

方重力の効果が強い場合 $t_L \simeq \tau_L$ とおける。したがって(5)式は $E_L = \text{一定}$ となる。さらに $E_L = \rho_L (L/t_L)^2 \simeq GL^2 \rho^2$ から $\rho_L^2 \propto L^{-2}$ を得る。すなわち2体相関関数 $\xi(r) = \langle \rho(r) \rho(0) \rangle$ に対し

$$\xi(r) \propto r^{-2} \quad (6)$$

である。

相関関数の逆二乗則(6)は自己重力系でしばしばみられるものである。特に有名なものに宇宙の質量分布に対する観測結果 $r^{-1.8}$ 則がある。これも逆二乗則に近い。計算機実験はむしろ逆二乗則に近いが、この違いはおそらく宇宙の構造がまだ完全な逆二乗に到達していないことを示すものであろう。

参 考 文 献

- ・ 相分離のスケーリングの総合報告として例えば
H. Furukawa, Adv. Phys. **34**, 703 (1985)
- ・ 非散逸流体の相分離について
H. Furukawa, Phys. Rev. A. **36**, 2288 (1987)
- ・ 重力乱流における質量密度相関について
H. Furukawa, Phys. Rev. A (in press).

天体カオス現象序説

近畿大・理工学総合研 海 野 和三郎

宇宙の中に流転する万物を博物学的に記述するには、どういう数学的枠組で考えるのが適当かを議論する。パラメタ空間内の分布、モード間相互作用、時系列の3つの場合につき、具体的な例で問題点を明らかにする。

§ 1 3つの特徴的な場合

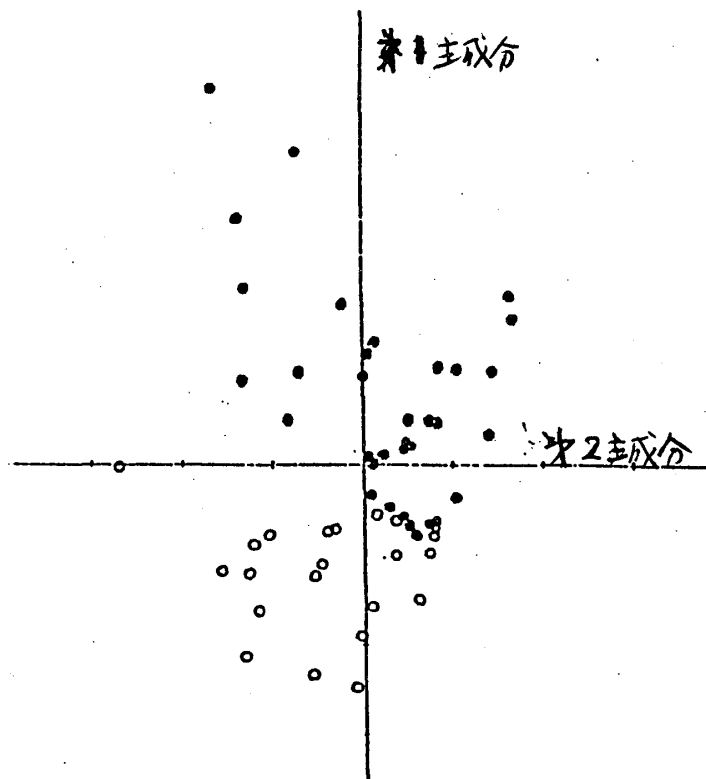
例として、星全体の変動全体を1つの系と考えると、この系の挙動は pmn 次元空間の点群の動きとして記述されよう。ここで、 p は星の質量、年齢、化学組成といった星を分類するようなパラメタの数で、 m は星の変動を支配するモードの数、 n は各変動量を時間間隔 τ だけ離してとるサンプリングの数である。第1の場合は、 $m=n=1$ で、星は p -空間にプロットされる。星の進化の博物学では、進化の時間尺度が人間の寿命より長いので $n=1$ で、モードは重力収縮又は核燃焼のモードで $m=1$ であるから(熱不安定性のため $m=2$ となることもある)、星は $H-R$ 図 ($p=2$) にプロットされる。第2の場合は $p=1$ (個々の星を扱う)で、 m 個の変動モードが相互作用する場合で、 n についてはいろいろな場合があるが、典

型的には $n < m$ でパワースペクトルを扱うならば $n = 2$ (2点相関) である。太陽5分振動などがこの例である。第3の典型的な場合は、 $p = m = 1$ で n 点相関までを問題にする時系列の場合である。ただし、 $m = 1$ というのは相互作用するモードが1つしかないという意味ではなく、1つの量しか測定されていない場合のことである。古典的な太陽周期活動(ウォルフ数)の予報などの問題がある。

§2 主成分解析 (Principal Component Analysis)

パラメタ空間内のプロットを解析する手法は主成分解析である。力学系理論としての面白さはないが、社会科学等応用面は広い。変動の方向が理論的に既知である場合以外は、変動の軌跡を問題にできないので、例えばリャプノフ数などを決定できないのが欠点である。一方、博物学的なデータを余す所なく利用できるのも、解析結果は発見的である点が長所である。

質量放出星の分類を考えているが、観測データはUBV測光、IRASの赤外(3, 5, 12, 25, 60, 100 ミクロンデータ)、ミリ波(CO, HCN)分子線強度速度幅などである。これらの諸量で記述される系が本質的に何次元の系であるか、その位相空間内の分布に構造が見られるかどうかなどを問題とする。通常、2色図などをつくって統計的研究を行うのであるが、もし質量放出が定常的なものでなく長い時間尺度であってもバースト的なものであるならば、本質的には相関のある2色の関係が第3の自由度に邪魔されて見えにくくなるであろう。その困難を除くのが主成分解析である。第1図は、質量放出量のIRASデータから距離によらない4色の色指数をつくり主成分解析した結果を示す。第1主成分と第2主成分による2次元プロットであるが赤外線星(黒丸)と赤色巨星(白丸)との分離が殆んど完全であることが目につく。



第1図 質量放出星 ● IR星 ○ 赤色巨星

第1主成分はダスト・シェルの発達の程度を示すよい指標である。

一方、天体観測では対象ごとにまた観測装置ごとに、感度や位置のちがいがあ、すべての星についてすべての観測量が得られるわけではない。もし欠測のある不完全データの星を除いていたら多くの情報が失われる結果となってしまう。充分よい精度の測定 of ウェイトを1欠測のウェイトを0とするようなウェイト付き主成分解析をする必要がある。また、その主成分解析の結果を用いて各測定の調整値を求め、欠測を補充して分類や統計を行なうことが、自然史的発見的研究に重要であろう。

すべてウェイト1の測定のM個の量 $q_1, q_2 \dots q_M$ がN個の星について得られたときの主成分解析の原理は、

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N w^{(n)} p_i^2(n) + \frac{\lambda_i}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^M \mu_{ij}^2 \right) = \min. \quad (1)$$

但し、

$$p_i = \sum_{j=1}^M \mu_{ij} q_j, \quad p_i(n) = \sum_{j=1}^M \mu_{ij} q_j^{(n)} \quad (2)$$

q_j は平均値0、標準偏差1に規格化してあるとする。 $p_i(n)$ はn番目の星のi番目の主成分、 $q_j^{(n)}$ はn番目の星の q_j 値である。 μ_{ij} は p_i の q_j との方向余弦で、Lagrange multiplier λ_i が固有値でそれに属する固有関数が主成分 p_i ということになる。重み $w^{(n)}$ は今の場合1で、もし同一の $p_i(n)$ 値をもつものがあるれば、その多重度をあらわす。

重みとは多重度であるという考え方で1個の星(n番目の星)を $w_1^{(n)} w_2^{(n)}$ 個の $(q_1^{(n)}, q_2^{(n)})$, $w_1^{(n)}(1-w_2^{(n)})/2$ 個の $(q_1^{(n)}+1)$ および $(q_1^{(n)}-1)$, $w_2^{(n)}(1-w_1^{(n)})/2$ 個の $(+1, q_2^{(n)})$ と $(-1, q_2^{(n)})$, $(1-w_1^{(n)})(1-w_2^{(n)})/4$ 個の $(+1, +1)$, $(+1, -1)$, $(-1, +1)$, $(-1, -1)$ を観測値 (q_1, q_2) とする場合の合計9個(観測量が2つの場合)の星に分けて考える。こうやってつくった S_i は、

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{j,k=1}^M \left[w_j^{(n)} \delta_{jk} + (1 - \delta_{jk}) w_j^{(n)} w_k^{(n)} \right] q_j^{(n)} q_k^{(n)} \mu_{ij} \mu_{ik} + \frac{\lambda_i}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^M \mu_{ij}^2 \right). \quad (3)$$

任意の $\delta \mu_{ij}$ に対して $\delta S_i = 0$ の条件から λ_i と μ_{ij} が求められる事情は(1)と同じである。

重みの小さい観測及び欠測に対する調整値 $q_{j,0}^{(n)}$ を求めるには、観測値 $q_{j,0}^{(n)}$ の重みを $w_{j,0}^{(n)}$ として、

$$S = \sum_{i=1}^M S_i + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^N w_{j,0}^{(n)} (q_j^{(n)} - q_{j,0}^{(n)})^2 + \sum_{n=1}^N (1 - w_{j,0}^{(n)}) q_j^{(n)2} \right] \quad (4)$$

但し、調整後の重み $w_j^{(n)}$ は

$$w_j^{(n)} = w_{j,0}^{(n)} + (1 - w_{j,0}^{(n)}) e^{-c \sum_i |\mu_{ij}| \lambda_i} \quad (c \sim 1) \quad (5)$$

ととって、 $\delta S = 0$ の条件で、 $\delta q_j^{(n)}$ 変分に対して $q_j^{(n)}$ を求めることを提案する。(3)式における $q_j^{(n)}$ を調整値とすれば、 $\delta S = 0$ for $\delta \mu_{ij}$ で μ_{ij} も同時にとけば consistent な結果が得られるであろう。ただし、この方法はまだ検討中である。

§ 3 モード間の非線形相互作用

浦田 (K. Urata, Fluid Dyn. Res. 1., 257. 1986) は, レーレー数 2×10^4 プラントル数 1 のブシネスク対流セルの乱れへの移行を 3 次元数値シミュレーションを行った。層流対流が中間層に安定層をつくり出すと, そこに重力波が励起されて振動的対流に移行する。ついで垂直渦度成分をもった対流モードが出現し, 3 種のモードの競合によりカオティックな対流となることが見出された。その状態の解析の結果は, フラクタル次元 3.3, 正のリヤプノフ数が 2 つ得られた。このような, 3 つ以上のモードの非線形相互作用がカオスを生ずる過程は, ある程度スピーゲル (Chaos in Astrophysics, ed. J. R. Buchler, J. M. Perdang and E. A. Spiegel, 1985, Reidel, p. 91) によって明らかにされた。3 種以上のモードの相互作用する系の一例として, 地球総人口, 地表平均気温, 二酸化炭素量, 太陽放射量の定常値からのずれ x, y, z, u からなる系を考える (W. Unno and K. Urata, Hydrodyn. and Magnetohydrodyn. Problems in the Sun and Stars, ed. Y. Osaki, Univ. of Tokyo, 1986)。振幅方程式を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha y + A, \quad \dot{y} = b y + r z + B, \quad \dot{z} = \beta x + C \\ \dot{u} &= U e^{i\omega t}, \quad A, B, C: \text{非線形項。} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで, 非線形項のくり込み,

$$x = \xi + \phi(\xi, \eta, \zeta, u), \quad y = \eta + \psi(\xi, \eta, \zeta, u), \quad z = \zeta + \chi(\xi, \eta, \zeta, u) \quad (7)$$

(ϕ, ψ, χ は非線形項) を行うと結果は,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha y + f(\xi, \eta, \zeta, u), \quad \dot{\eta} = \beta \xi + r z + g(\xi, \eta, \zeta, u) \\ \dot{\zeta} &= \beta \xi + h(\xi, \eta, \zeta, u) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となるが, f, g, h は可能な限り 0 としたい。しかし, 線形モードが永年不安定 (線形マトリックスの行列式が 0) の場合 ($r=0$) を考えると, f, g, h をすべて 0 とするような解は不能となる。(6) を (5) に代入すると, ϕ, ψ, χ をきめる方程式は,

$$(L - a) \phi = A - F - f \quad (9)$$

$$L = \alpha \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + b \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \beta \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} + i \omega u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & b & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$F = \left(f \frac{\partial}{\partial \xi} + g \frac{\partial}{\partial \eta} + h \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \phi$$

である。 ϕ, A, f を $\xi^p \eta^q \zeta^r u^s$ ($p+q+r+s \equiv d \geq 2$) の形のベキ級数展開をして, ϕ の級数解を求

める。 $|a|=0$ の場合 $f=0$ であると、 ϕ の展開の係数を求める式は未知数と方程式の数が一致しない不能と不定の2群の連立一次方程式系に分かれる。解を不能にしないためには $f \neq 0$ とすればよいが、この条件で f が求まる。

このように標準形にした方程式(7)について非線形項の大きさを適当にとり、散逸系である ($\text{div } \dot{\xi} < 0$) などの制限をつけてつくった解の一例が第2図である。

$b=-1$ にとったので実質的に y は slave mode となり、系は x, y の2つのモードとなり、解はリミットサイクルとなるが、第2図の場合、強制振動 u を入れて3つのモードの系にしてやるとカオティックになる。地圏生物圏問題を占うにはあまりにも粗末な数値実験であるが、このような手法で問題を究明することが必要ではないかと思われる。

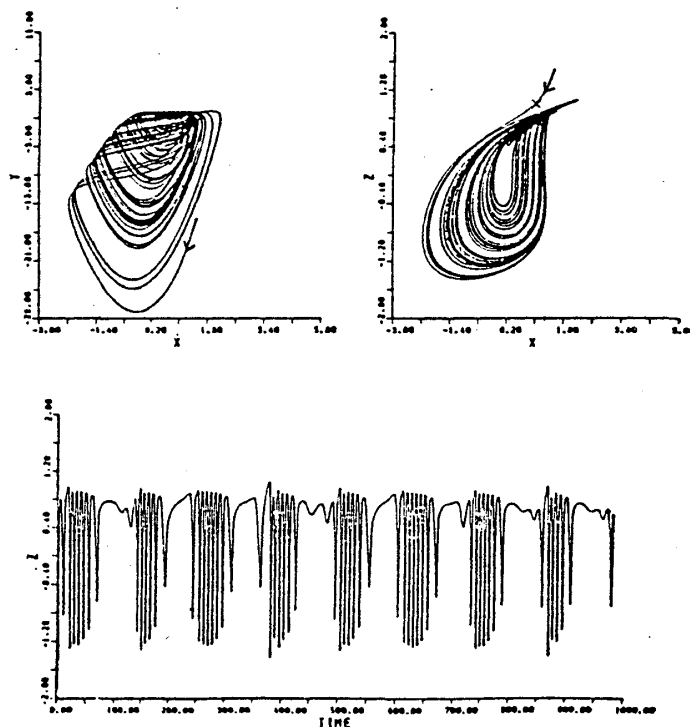
§4 時系列

時系列解析は、Yule によって黒点活動に対して始められたが、黒点周期活動はダイナモ機構の非線形性によりカオスの典型的な問題として重要である。Yule の始めたのは AR (auto regression) モデルで、

$$f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_M f_{n-M} + (\text{white noise})$$

で表わされると仮定する。これを

$$(2) - (i) u = 0.1 \cdot \sin(2\pi t / 20) \quad \begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (\alpha_1, -1, 1) \\ (f_1, f_2, f_3, f_4) &= (1, -1, 1, 1) \\ (g_1, g_2, g_3, g_4) &= (1, 1, 1, 1) \\ (h_1, h_2, h_3, h_4) &= (-1, -1, 1, 1) \end{aligned}$$



第2図 強制振動 u でカオスとなった例

$$\sum_j A_j f(n-j) = w_n \quad (10)$$

とかく。

$$\begin{aligned} \text{Mellin 変換: } \hat{f}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^n \\ f(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-1-n} \hat{f}(z) dz \end{aligned}$$

により,

$$\hat{A} \hat{f} = \hat{w} \quad (11)$$

($z = e^{i\omega}$ とかけば Fourier), さらにパワースペクトル

$$\tilde{g} = \hat{g}(z) \hat{g}(z^{-1})$$

を定義すると

$$\tilde{f} = \frac{\sigma^2}{\tilde{A}} \quad (12)$$

により $\tilde{f}$ のスペクトルが決定される。ただし, σ^2 は white noise w の分散 $\tilde{w} = \sigma^2$ である。

Cyg X-1 のデータ f の中にはシグナル S とポアソンノイズ N を含むが, シグナルが AR モデルで表されると仮定すると,

$$\hat{f} = \hat{S} + \hat{N}, \quad \hat{A}(\hat{f} - \hat{N}) = \hat{w}$$

であるから,

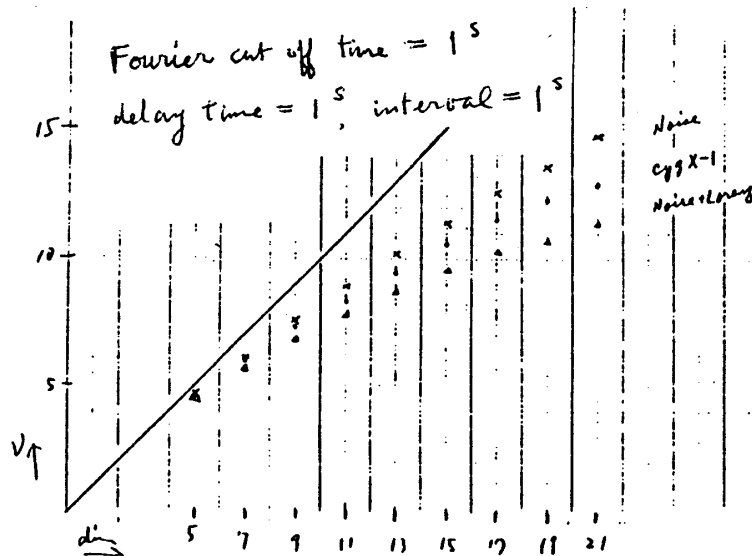
$$\hat{A}(\tilde{f} - \tilde{N}) = \sigma^2 \quad (13)$$

により $\tilde{A}$ を求め,

$$\tilde{S} = \sigma^2 / \tilde{A}$$

によりシグナル S のスペクトルが求められる。

赤池等 (赤池弘次編, 科学の中の統計学, Blue Backs, 1987, p. 240) は, Tenma による Cyg X-1 のデータについて 2.2 Hz 附近に明瞭なスペクトルの小ピークを発見した。私達は, 逆に低次元カオスにノイズを加えたものを Cyg X-1 のデータと比較することを考えた。(W. Unno, T. Yoneyama, K. Urata, I. Masaki, M. Kondo and H. Inoue, Publ. A. S. Japan 投稿) 即ち, $[X(t), X(t+T), X(t+2T), \dots, X(t+(m-1)T)]$ で m 次元位相空間をつくり, $t = t_0, t_0 + \tau, t_0 + 2\tau, \dots$ によって軌道を追って行き, できたマップについて距離 r より二点間の間隔の小さいペアの総数 $C(r)$ が r の何乗になっているかによってフラクタル次元 D を勘定しようとするのであるが, データの長さが有限なこととノイズの影響とが複雑にからみ合って D が一義的に求まらないのである。第 3 図は横軸に m , 縦軸に D の測定値 ν (ν の決定にもいろいろな問題があるが省略する) をとったものである。



第3図 ノイズで乱された有限な長さの系のフラクタル次元

うめ込みの理屈からすると、理想的には、 $m < D$ では系のふるまいはノイズと区別できないから $\nu = m$ となり、 $m > 2D + 1$ では $\nu = D$ となるべきであるし、もし系がノイズのみからなると $D = \infty$ とするといつも $\nu = m$ となるべきものである。しかし、ノイズにも特性的時間尺度はあるし、データの長さは有限であるので、 m が大きくなってくると $\nu < m$ となってくる。低次元 D のカオスにノイズが加わった場合は、 $m < D$ では $\nu = m$ であるが、 $m > 2D + 1$ でも $\nu_{\text{Noise}}(m) > \nu > D$ となる。このことは、 $D < m < 2D + 1$ の場合も同じであるが、 $\nu(m)$ が $\nu = m$ からずれる場所が D によってちがってくる。他の条件を同じにすれば、この D への依存性を利用して D を求めることができるであろう。第3図は Cyg X-1 に対して、ノイズのみのデータと Lorenz カオスにノイズを加えたものをレファレンスとして $\nu(m)$ をプロットした。 $D \leq 7$ が結論であるが、不確定性は大きい。むしろ方法論の試案と考えてもらった方がよい。この方法を系統的にやるには、 d 個の盡数関係にない周期をもつ単振動の重ね合わせにノイズを加えたものを有限長さに切ったデータで $\nu_d(m)$ を求めておいてこれをレファレンススケールとして観測された系の D を求めるのがよいと思われる。ノイズの時間尺度、分散の大きさに対する $\nu_d(m)$ の依存性も問題である。

Cyg X-1 についてリヤプノフ数を求めることも試みたが、ノイズが大きいため確かな結果は得られなかった。方法は Wolf 等 (A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastans, Physica 16D, 285, 1985) の方法、つまり線素片、面積素片、体積素片 etc. の拡大率を計算して大きい方からリヤプノフ数の和を求めるやり方を用いた。しかし、この方法は局所的なノイズの影響を受け易く、ARモデルで位相まで考慮してノイズを除去するようなことができれば、ノイズフリーのデータを再構成して、それを用いる必要がある。これまでの解析では、値の小さい正のリヤプノフ数が2, 3あるようにみえるが、 $5 \leq D \leq 7$ くらいになるとリヤプノフ数が小さいことが一般的なのかどうか、スペキュレーションの問題である。

天体カオス現象はいたるところに見られる。この小論ではそのつかまえ方のあらすじを述べたつもりである。本当は中味の物理が大事なのであるが、まだそこまで到達していない。