研究会報告

連続体におけるパーコレーションパターン

京大教養　冨田博之　　京大理　村上力

急冷された２成分系は，一様相が熱力学的に不安定で，相分離を起こしていく過程は典型的な非線形パターン形成の問題である．この場合のパターンは，ランダムで巨視的にみれば一様・等方的と特徴づけられるが，成分の組成比の大小によって，液滴系のような孤立したパターンのランダムな集合であるかパーコレイティングなランダムパターンであるかの幾何学的な違いがあり，それぞれに応じた扱いが必要になる．ここでは，ダイナミックスを離れてランダムなパターンの統計幾何学を考えてみる．

スピノダル分解に典型的に見られるように，相分離の問題は本質的に非線形問題であるが，少し乱暴な言い方をするなら，オーダパラメータのゆらぎは線形化してガウス場として扱い，非線形性は飽和効果のような別の形で取り入れることにより成功している例も多い．

また，純粋にパーコレーションの問題としてみても，やはりガウス場が重要な役割を果たす．すなわち，連続体においては無相関場，いわゆるベルヌーイ問題はそのままでは意味を持たない，特徴的な長さの無いトリビアルな自己相似場の一種であって，パターン（多様体）が定義できない．そこで考えられることは，何らかの形で場を粗視化することであるが，元の場が無相関ならば，粗視化した場は（相関のある）ガウス場になる．

そこで，連続体のパーコレーションを考察するひとつのモデルとして，ｄ次元のガウス確率場で作られるランダムな地形に水を満たした時にできる統計的な多様体（Ｅｘｃｕｒｓｉｏｎ Ｓｅｔというが，ここでは簡単に「海」，残りの部分を「陸」と呼ぶ）を導入し，その幾何学を考察する．

$\{u(\mathbf{r})\}$ をｄ次元ユークリッド空間で定義された，一様・等方的で，なめらかな相関関数

$$\begin{aligned}\sigma(r) &= \langle u(0)\, u(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \sigma(0) - |\sigma''(0)|\, r^2/2! + \sigma^{(4)}(0)\, r^4/4! + \cdots\end{aligned} \tag{1}$$

を持つｎｏｎ－ｅｒｒａｔｉｃなスカラ的ガウス確率場とし，海と海岸を

$$U = \{\mathbf{r} \mid u(\mathbf{r}) < U\} \quad : \quad 海$$
$$\delta U = \{\mathbf{r} \mid u(\mathbf{r}) = U\} \quad : \quad 海岸$$

で定義する．また，水面の高さUのかわりに海の占める比率

$$\phi(U) = \langle \theta(U - u(\mathbf{r})) \rangle \tag{2}$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{U} \exp(-u^2/2)\, du$$

すなわち，2成分混合系での体積組成比をパラメータにとることができる．要するに連続自由度のガウス分布（正規分布）であるから，いろいろな期待値，たとえば海の分布の相関関数

$$\langle \theta(U - u(0))\, \theta(U - u(\mathbf{r})) \rangle$$

のような量を計算することが可能であるが，この相関関数は$0 < \phi < 1$のどのϕの値に対しても何らの特異性も示さないことは，格子パーコレーション問題の場合と同様である．残念ながら，パーコレーションで最も重要な，クラスタ（湖）の大きさの分布（あるいは平均）は，1次元以外は今のところ計算されていない．（1次元では，ガウス過程の再帰時間問題である．）これに対し，海を構成する多様体のトポロジーを特徴づける不変量であるオイラー標数（EC）は，δU上でのガウス全曲率の分布，あるいはU内の臨界点（$\nabla u = 0$）の分布という局所的な量で定義され，ガウス場の場合，任意の次元について計算することが可能である．単位体積あたりのEC密度で表わせば，結果は簡単で，d次元では

$$\chi_d(U) = \lambda^{-d} (d/dU)^d \phi(U) \tag{3}$$

すなわち，エルミート多項式の母関数表示にほかならない．λは元のガウス場の相関距離で

$$\lambda = (2\pi / |\sigma''(0)|)^{1/2} \tag{4}$$

であるが，（3）式はこれ以外にガウス場の個性を表わす量を何も含んでおらず，普遍的な形をしている．

$\phi<<1$では，海は孤立した小さな湖から構成されるが，この場合χ_d（>0）は湖の分布密度とみなしてよい．ϕの増加に伴い湖の数が増えるから，しばらくはχ_dは増加するが，湖が合体を始めると減少に転じ，ϕのある値で符号が変わる．いわば「平均的トポロジー」の転移点である．この値ϕ_cは，$d=1$では$\phi_c=1$で自明な結論，$d=2$では$\phi_c=0.5$で対称性により知られているパーコレーション限界値に等しい．$d=3$の値$\phi_c=0.15865$は，シミュレイションや格子問題から推定されている限界値０．１５～０．１６に一致する．

これは決して偶然ではない．（３）が普遍的な形を持つことから，χ_dの関数形は粗視化あるいはスケール変換に対して不変であり，そのゼロ点は不動である．χ_dのゼロ点は必ずしも自己相似性を意味しない（例えば，$d=3$ではソリッドトラスの集団で$\chi_d=0$）が，逆に，無限に広がった自己相似な系は特徴的な長さを持たず，$\chi_d=0$でなければならないから，パーコレーション限界が存在するならばϕ_c以外には無いと結論してよい．また，（３）式の次元パラメータｄを連続変数に拡張し，Ｒｉｅｍａｎｎ－Ｌｉｏｕｖｉｌｌｅの積分公式

$$\chi_{d-v}(U)=\Gamma(v)^{-1}\int_{-\infty}^{U}\chi_d(t)(U-t)^{-(1-v)}dt$$

を用いて解析接続すれば，ゼロ点はひとつの連続分枝上に乗ることを示すことができる．

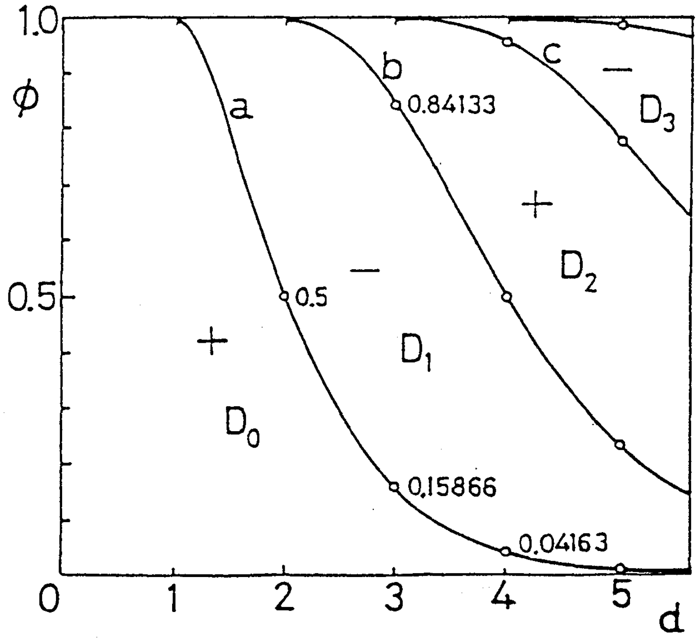

図１　連続次元への解析接続とオイラー標数の相図

ｄ＝３では，もうひとつのゼロ点ϕ_c＝０．８４１３５が見い出されるが，これは陸がパーコレイトする限界であり，この２つのϕ_cの間では海と陸の双方が互いにパーコレイトしたパターンを形成している．２次元ではこのような範囲は存在しない．（これがϕ_c＝０．５の根拠である．）以上は普通行なわれている理解であるが，あくまでも海だけに注目した見方を続けるなら，この点はやはり海の平均的トポロジーの転移点であるはずである．この点ではχ_dが再び正に転じることから，海が網目状（$\chi<0$）から泡状（$\chi>0$）に転じると理解できよう．ただし，この上の限界値で何等かの量が臨界的挙動を示すかどうかは確かではないが，定性的には，海が光学的に透明で陸は完全に不透明な物質だとして，一方の端からコヒーレントな平面波を入れた時，透過できるかどうかの限界，いわば光学的パーコレーション限界と考えてよいのではなかろうか？　少なくとも網目状のパターンでは，長さの異なる経路を通過した波はランダムに干渉してしまい透過できないことは確かである．このようなトポロジカルな転移はｄ次元ではｄ－１回起きることになる．このことは，次元を連続変数に拡張することにより得られた図１に明確に示されている．χ_dの符号を＋－で示してあるが，領域D_0は孤立したパターンの系，D_1はトポロジカルな次元が１の網目状にパーコレートした領域（ｄ＞１），D_2は２次元的な泡状領域でｄ＞２でしか存在していない．またD_1とD_2の境界線ｂがｄ＝４でϕ＝０．５を通過することは，パーコレーション限界線ａがｄ＝２でϕ＝０．５を通過することと同じで，場の対称性の現れである．

（参考文献）

1)H.Tomita,Prog.Theor.Phys.76(1986),952.

2)H.Tomita and C.Murakami, Statistics of Random Pattern --- Curvature, Percolation and Others, in 'Dynamics of Ordering Processes in Condensed Matter', S. Komura ed. (Proceedings of the international Symposium held at Kyoto, Aug. 1987 : Plenum Pub-lishing Co. 1987, in press)