研究会報告

長距離相互作用系の統計とフラクタル

神戸大理学部地球科学科　高安秀樹

重力はベキ乗の長距離相互作用を持っており、多体系の理論的な扱いは容易ではない。しかし、ベキ乗であるがゆえに特徴的な長さがないというフラクタル的な性質を持っている。理論的な扱いの今後の進展は、その性質をうまく利用かどうかにかかっていると言っても言い過ぎではないだろう。

重力多体系の統計に関して大変基本的で興味深い解析をホルツマークが今世紀初頭に発表した。彼が考えたのは３次元のユークリッド空間に星が質量も座標も全くランダムに分布しているような系で、任意の１点における重力の分布を厳密に求めた。ひとつの星に働く重力は他のすべての星からの重力の和である。たくさんの星からの力の和は中心極限定理からガウス分布になるのではないかと予想されるかもしれないが、それは正しくない。彼が得た答えは、ベキ乗の裾野を持つような特性指数が３／２の安定分布だったのである。安定分布に関する詳細は参考文献に委ねるとして、ここでは次のような簡単な次元解析のような議論だけで求める分布の関数型まで決定することができることを紹介したい。

星の質量の分布を与えておけば、今考えている系の力の分布を支配するパラメータは、単位体積あたりの星の数、すなわち密度、だけしかない。力は距離の逆２乗に比例し、密度は単位長さの３乗に比例することから、密度をλ倍すると力は$\lambda^{2/3}$倍になることがわかる。また、密度がａ＋ｂであるような系の力の分布は、密度がａである系の力の分布とｂであるような系の力の分布を足し合わせた分布と等しいはずである。これらのことを式を用いて表現すると次のようになる。

$$F_{\lambda a} \sim \lambda^{2/3} F_a \qquad (1)$$

$$F_{a+b} \sim F_a + F_b \qquad (2)$$

ここで、F_aは密度がａの系の力を表わし、記号～は、両辺の分布が等しいことを示す。これらの条件は、実は相当きつい条件で、（１）、（２）を同時に満足するような確率分布は特性指数が$\alpha = 3/2$の安定分布でなければならないことが証明されている。そして、力の分布が符号の反転に対して対称であることを考慮にいれると、対称な安定分布はただ

ひとつしかないので、力の分布は次のように一意的に決まってしまう。

$$p(\vec{F}) = \frac{1}{2\pi}\int d\vec{\rho}\; e^{-i\vec{\rho}\vec{F} - a|\vec{\rho}|^{3/2}}$$

先にも述べたように、この分布にはベキ乗の裾野（$F^{-5/2}$）がある。

ここでの議論は、簡単に一般化することができる。例えば、星の分布がＤ次元で力が距離のβ乗に逆比例するときには、求める力の分布は特性指数がＤ／βの安定分布となり、$F^{-D/\beta-1}$の裾野を持つことになる。

このように、重力がフラクタル的な性質であるベキ乗則にしたがうことをうまく利用すると、なんら複雑な計算も近似もなしに答えが得られることは大変教訓的である。今後、重力多体系の統計にフラクタルの考え方がおおいに使われることを期待したい。

参考文献

Ｗ．フェラー、確率論とその応用Ⅱ、紀伊国屋書店、1969。

高安秀樹、フラクタル、朝倉書店、1986。

H. Takayasu, J.P.S.J. 56(1987), 1257.