大自由度保存力学系

東大教養　武　末　真　二

§1　はじめに

古典論の範囲で考えれば，この世は微視的には大自由度保存力学系で記述される。一方，巨視的には熱力学的振舞いが成り立ち，温度，圧力などの少数個のパラメータによる記述が有効になる。微視的記述と巨視的振舞いとは統計力学によって結びつけられるが，そこでは力学系の動力学的性質は捨象されてしまい，表には現れない。しかし，熱力学的振舞いが成立するためには，力学系に対するなんらかの仮定が必要なはずである。その仮定とは一体どういうものであろうか。

熱力学的振舞いを成り立たせるため，力学系に対する条件をエルゴード性と呼ぶ。エルゴード性に関する研究（エルゴード理論）は，数学の分野において発達し，様々な概念が整備された。これらの概念は，抽象的な測度空間上の力学系に対して定義されており，従って無限系に対してもそのまま適用できる。ところが，相互作用のない無限理想気体にエルゴード理論を適用すると，この系はエルゴード性の階層の中で最も高い性質（ベルヌーイとよばれる）を満たしてしまう。これは我々の持つ物理的直観とは相反する結果であり，大自由度系のエルゴード性を記述するには新しい概念が必要であることを示している。

一方，有限自由度のハミルトン力学系では，KAM定理のために，最も低いエルゴード的性質ですら一般には成り立たない。この有限自由度と無限自由度とのギャップは，おそらく自由度→∞の漸近的振舞いを調べることによって埋められるであろう。我々はこの立場から大自由度系の問題を考え，特に熱力学的振舞いに対応する力学系としての性質を抽象することを目指したい。残念ながら，この問題について明らかにされたことは少なく，一般的な結果は殆どしられていない。そこで以下では，問題点の整理を行い，いくつかの試みについて述べることにする。

§2では，上で触れた無限理想気体のエルゴード性について更に詳しく解説する。§3では，ハミルトン系の相空間構造について述べる。§4では，筆者が行っている，可逆なセル・オートマトンを用いた研究について解説する。そして§5では，まとめと議論を行う。

§2　無限系のエルゴード性

エルゴード性にはいろいろな段階があり，ベルヌーイ（Bernoulli）＞K－系＞混合的（Mixing）＞エルゴード的（Ergodic）といった概念が知られている。この4つの概念は，それぞれ，自分よりも左側の性質が成り立っていればその性質自身も成立するという，階層的な構造を成している。まずこれらについて，定義とその意味するところを述べておこう。これらの概念は，一般の測度空間上の力学系に対して与えられるが，ここではflow（即ち，測度空間上の保測変換の1パラメータ群 $\{T^t\}$ $(t \in R^1)$ で，$T^{t+s}(x) = T^t(T^s(x))$ を満たすもの）の場合についての定義を示す。

定義1：エルゴード的とは，任意の不変集合A（i.e. 任意のtに対し $T^t(A) = A$）の測度 $\mu(A)$ が0ま

たは1となることをいう。

このとき，物理量の時間平均と，μによるアンサンブル平均とは等しくなる。物理的には，これが元々のエルゴード性の概念であった。さらに，エルゴード的な測度に絶対連続な不変測度はそれ自身しかないということがいえるので，有限自由度のハミルトン系においてミクロカノニカルアンサンブルを用いることがこれにより正当化される。

定義2：混合的とは，任意のL^2関数 f，g に対し，

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_M f(T^t x)g(x)\,d\mu=\int_M f\,d\mu\cdot\int_M g\,d\mu$$

が成り立つことをいう。

混合性があると次のことがいえる。λをμに絶対連続な測度とし（即ち，$d\lambda=p(x)\,d\mu$と書ける），$\lambda_t(A)=\lambda(T^{-t}A)$でその時間発展を定義する。するとこのとき，$\lambda_t(A)\to\mu(A)\ (t\to\pm\infty)$が任意のAに対して成り立つ。つまり混合性とは一種の緩和の性質である。

K－系とベルヌーイの定義のために，まず分割について次の定義を行う。

定義3：相空間Mの可測分割の族$\{\xi_\alpha\}$に対し，

$$\vee_\alpha \xi_\alpha$$

で，任意のαに対してξ_αの細分となるような分割の中で最も粗いものを表し，

$$\Lambda_\alpha \xi_\alpha$$

で，任意のαに対してξ_αがその細分となるような分割の中で最も細かいものを表す。このとき，

定義4：K－系とは，次のような分割ξが存在する系のことをいう。

(i) $\vee_t T^t\xi=\varepsilon$

(ii) $\Lambda_t T^t\xi=\nu$

ただし，εは点毎の分割，νは全空間を要素とする自明な分割を表す。簡単にいうと，条件(i)は，各時刻に軌道がどの分割に来るかという測定を考えた時（一種の粗視化），無限の測定をしないと軌道が定まらない，即ち確率的要素の出現を表し，(ii)は，相空間が総てつながっていることを示す（任意の点から別の任意の点の近傍へ行く軌道が存在する）。

一般に，分割$\xi=(C_1,\cdots,C_r)$のエントロピーを，

$$H(\xi)=-\sum\mu(C_i)\log\mu(C_i)$$

とおくと，次の極限が存在する。

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}H(\xi\vee T\xi\vee\cdots\vee T^{n-1}\xi)$$

力学系がK－系ならば，任意の自明でない有限分割ξに対して$h(T,\xi)>0$となる。また，この逆も成立する。

定義5：ベルヌーイ系とは，毎回の測定が独立になるような分割の仕方が存在する系のことをいう。

即ち，各回の測定がコイン投げと等価になることである。この場合，KSエントロピー $h(T)=\sup h(T,\xi)$ が等しい値を持つならば，力学系の間に同型対応が存在する（Ornsteinの定理）。

さて，相互作用のない無限粒子系は以下のようにして構成される。まず1粒子状態空間（いわゆる μ 空間）をRとし，その上の力学系を S^t，不変測度を ρ で表す。これを基に，無限系の位相空間（Γ 空間）Mを次のように定義する。

$$M=\{Y\subset R: Y\text{は加算 (countable) かつ局所有限 (locally finite)}\}$$

局所有限とは，有界な部分空間には有限個の粒子しか存在しないことを表す。Mの上の力学系 T^t は，$Y=\{Y_i\}$ に対し，

$$T^tY_i=\{S^tY_i\}$$

で定義，さらに不変測度 μ は，

$$C_{B,k}=\{Y\in M: \mathrm{card}(Y\cap B)=k\}$$

なる集合に対して，

$$\mu(C_{B,k})=[\rho(B)]^k e^{-\rho(B)}/k!$$

かつ，

$$\mu(C_{B_1,k_1}\cap\cdots\cap C_{B_s,k_s})=\mu(C_{B_1,k_1})\cdots\mu(C_{B_s,k_s})$$

と定義することにより得られる。こうして作った力学系 (M, T^t, μ) を，力学系 (R, S^t, ρ) のPoisson suspensionという。d次元理想気体の場合の1粒子系を具体的に書いてみると，

$$R=R^{2d}\ni(x,v),\quad x\in R_x^d,\quad v\in R_v^d$$

$$S^t(x,v)=(x+vt,v)$$

$$d_\rho=f(v)\,dx\,dv \qquad (f\text{は任意の関数})$$

となる。

このような相互作用のない無限粒子系に対しては，次の定理が成立する。

定理：

実数 τ と可測な部分集合 $C\subset R$ が存在して，整数k，lに対し，

(1) $S^{k\tau}C\cap S^{l\tau}C=\phi \qquad \text{if} \quad k\neq l$

(2) $\bigcup_{-\infty<k<\infty}S^{k\tau}C=R \qquad (\mathrm{mod}\ 0)$

を満たすならば，Poisson suspensionはベルヌーイになる。

理想気体の場合には，$\tau>0$ に対して，

$$C=C_{\tau}=\{(x,\ v)\in R^{2d}:\ v_1>0,\ 0\leqq x_1<\tau v_1\}$$
$$\cup\{(x,\ v)\in R^{2d}:\ v_1<0,\ \tau v_1<x_1\leqq 0\}$$

とおけば定理の条件を満たす。

結局この定理がいうのは，軌道が戻って来ずに無限に遠ざかっていくならば，無限系は高いエルゴード性を示すということである。このことは逆も成立ち，無限回戻って来るような（recurrentな）運動をする領域が正の測度を持って存在するならば，無限系はベルヌーイになりえないということも証明できる。この意味で1粒子運動のエルゴード性と無限系のエルゴード性とは，反対の性質であるといえる。

何故このようなことになったのだろうか。その鍵は絶対連続という概念にある。有限系の平衡測度はルベーグ測度なので，物理的な測度を絶対連続な測度に限ることは正当化できる。しかし，無限系の場合，典型的な非平衡の状態は平衡アンサンブルに対して特異的になる。絶対連続な測度とは，平衡系の測度に対して局所的な摂動を加えたものとみなすことが出来る。このような摂動は，軌道が戻ってこないという性質のために無限遠に去ってしまい，平衡状態が回復される。つまり，いま着目している有限の領域の外の部分が熱浴として働くのである。従って，混合性の条件を満たしてはいるが，緩和を示す測度はごく限られたものでしかない。

1次元hard rod系，及び完全調和格子も同様の高いエルゴード性を示す。これらも上記の意味では，理想気体を大きく越えるものではない。無限系のエルゴード性は，こういった場合に限られるのだろうか。統計力学の基礎づけのためには，もっと広い状況のもとで物理的な緩和を示すモデルが欲しいところである。

§3　ハミルトン力学系

ハミルトン力学系の中で，ある正準変換 $(p,\ q)\to(I,\ \theta)$ が存在して，ハミルトニアンを $H(p,\ q)=H(I)$ の形に書き直せるものを可積分系という。可積分系における軌道は作用変数 $I=(I_1,\cdots,I_N)$（自由度の数をNとする）で指定されるトーラス上の準周期運動になる。これに対して摂動が加わるとどうなるかを考えてみよう。一般にはこの場合，正準変換によってハミルトニアンを作用変数だけの関数に書き直すことは不可能になる。即ち，解けるモデルと解けないモデルとの間には，単なるテクニックの問題だけでは片付けられない本質的な差異が存在するのである。しかし摂動の大きさが小さいうちは，トーラスのなかに生き残るものが有限の測度で存在する。これがKAM（Kolmogorov-Arnol' d-Moser）の定理である。

KAM定理のために相空間の構造は次のような変化を示す。可積分系のトーラスの中には回転数の比が有理比のものと無理比のものが存在するが，有理比のものはレゾナンスを起こして周期軌道のペアを作り，その回りに振子（pendulum）に似た相空間構造を示す。これに対し，無理比のものは小さな摂動に対しては生き残り，相変わらず準周期運動を示す。レゾナンスの領域では，楕円型周期軌道の回りをまわる回

転運動が現れ，KAM領域とは，双曲型周期軌道をつなぐセパラトリクスによって分けられる。しかし，このセパラトリクスは不安定で閉じておらず，ここでの軌道はカオティックになっている。また，楕円型周期軌道の回りの軌道も，その回りの回転数比によって準周期運動とレゾナンスに分かれ2次の構造を作る。更にそのレゾナンスのまわり，……というように，いくらでも高次の構造が出現する。摂動が大きくなるとKAMトーラスも壊れるが，その後には，Cantorusと呼ばれるフラクタル的な不変集合が残る。

このようにハミルトン力学系は，極めて複雑な相空間構造を持つ。ここで，カオティックな運動の領域に注目してみよう。自由度の数が2のときには，KAMトーラスが相空間を分割する壁になるので，KAMが存在している場合にはこの領域は連結していない。従って，KAMトーラスが総て壊れてしまうまでグローバルな拡散は起こり得ない。そのため，最後に壊れるKAMトーラス（Last KAM）は何か，それはいつ壊れるのかといったことが問題とされ，多くの人々がいろいろな手段によって議論した。しかしここではそれについてはいっさい触れない。

自由度の数が2よりも大きいときには，KAMトーラスは相空間を分割することができず，カオティックな運動の領域は総てつながってしまう。（これはエネルギー面の次元が2N-1であるのに対し，トーラスの次元がNであることによる。）そのため，どんなに微少な摂動であっても，グローバルな拡散現象が起きる領域が存在するものと考えられる。これをアーノルド拡散という。アーノルド拡散に関して有名なのは次のNekhoroshevの定理である。

定理（Nekhoroshev）：次のようなハミルトニアンを考える。

$$H(I, \theta, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta)$$

ここでH_0のヘッセ行列は正定値，εはある正の値ε_0よりも小さいものとする。このとき，定数A, B, α βが存在して，

$$|I(t) - I(0)| < A\varepsilon^{\alpha}$$

が，すべての $t < B\varepsilon^{-1}\exp(\varepsilon^{-\beta})$ に対して成立する。

従って，εの値が小さいときにはこの拡散は非常に遅いものになる。しかし，例えば定数βの値は，自由度の数Nが増すにつれて減少し，$N\to\infty$で0になる。ということは，大自由度系でのアーノルド拡散は必ずしも遅いとはいえない。大自由度での漸近的振舞いの研究が必要であるが，それは現在，日本，イタリアなどいろいろなところで行われている。

$N\to\infty$でKAM領域の大きさがどうなるか，あるいはそもそも無限自由度の系にKAMは存在するのかといった問題も盛んに研究されている。しかし，一般的なことはまだ分かっておらず，いくつかの特定のモデルに対する結果があるのみである。そのうち前者に対しては，振動子の1次元鎖の系について，摂動の大きさがNのベキ乗に反比例するある量よりも小さければKAM領域が存在するというWayneの結果がある。（KAM定理の評価では，Nのベキ乗ではなく，N!のベキ乗になる）。また，後者に関しては，いくつかのモデルでKAMの存在が知られているが，それらはすべて無限の自由度の中に有限のエネルギーが存在する場合の話で，熱力学極限に対応する結果ではない。よって，統計力学に対してこれらの結果

がどのような意味あいを持つものかは，よく分からない。

2自由度系で，カオティックな運動の領域がつながってしまったとき，この領域(stochastic sea)の幾何学的特徴は，fat fractalという言葉で表される。即ち，高次低次さまざまのレゾナンスによる穴が，至るところ無数に空いていて，フラクタル的な構造を示す。但しこの構造は，普通のフラクタルと違って有限の測度を持っている。従ってこの構造を特徴づけるには，普通のフラクタル次元では不十分で，つぎのようなfat fractal exponent βが必要になる。

$$\mu(\varepsilon)-\mu(0)=A\,\varepsilon^{\beta}$$

但しここで$\mu(\varepsilon)$は，εよりも大きな穴を除いたときのstochastic layerの測度を表す。ところが，自由度の数が2よりも大きいときには，先にも述べたように穴自体が存在しなくなる。この場合には一体どのような記述が有効となるのだろうか。観測時間によって訪れる領域がどう変わっていくかといったことを見る試みが存在するが，まだ十分成功しているとは言えないようである。

計算機を用いて多自由度ハミルトン系での現象を捉えようとする研究も多く，少数自由度力学系の研究で有効であった，パワースペクトルやリャプノフスペクトルの測定などが行われている。これを基に，ランダムウォーク，ランダム行列との比較を行ったり，あるいはスペクトルの特異性からトーラスに巻き付く運動の特徴を捉えようとする試みなどがある。Stochastic seaの性質にみられるクロスオーバー等，興味深い現象は多数報告されているが，その統計力学に対する意味についてはまだ明らかではない。

N→∞では一体何が起こるのであろうか。自由度が大きいことによるエルゴード性の回復が一般的に起こるのか，それともKAMトーラスの存在の方が一般的なのか。そのとき統計力学の基礎はどのように考えればよいのか。大自由度ハミルトン系に関して残されている問題は余りにも多い。

§4　可逆セル・オートマトンの熱力学的性質

ハミルトン系の相空間構造は余りにも複雑で，未だ我々の理解を越えている。この複雑さは，ひとえにシンプレクティック条件，

$$\oint_{C_t} p\cdot dq=\text{const.}$$

(C_tは力学系に従って動く任意のループを表す)に因っている。しかし，統計力学ということに関して言えば，シンプレクティック条件は必ずしも必要ではなく，リウヴィルの定理とエネルギー保存則さえあれば形式的に統計力学を展開することが可能である。以下では，この条件を満たす最も簡単な力学系として可逆なセル・オートマトンを考える。また，次のような態度をとる。即ち，ここでは，熱力学的振舞いというものを具体的に定義し，それを各モデルが実現するかどうかを主に数値的に検証する。

ここで論ずるモデルの族は，ERCA(Elementary Reversible Cellular Automata)と呼ぶ，次のようなものである。

$$\sigma_i^{t+1}=f(\sigma_{i-1}^t,\ \sigma_i^t,\ \sigma_{i+1}^t)\ \ \mathrm{XOR}\ \hat{\sigma}^t$$

$$\hat{\sigma}_i^{t+1} = \sigma_i^t$$

σ^t, $\hat{\sigma}^t$は，時刻 t におけるサイト i 上の変数で，0または1の値をとる。f は，3変数のブール関数，XORは排他的論理和を表す。異なる f に対して，それぞれ異なるモデルが得られることになる。各々のモデルを表すのに，f の値をある並びに2進法で読んだ値，$\sum 2^{4\lambda+2\mu+\nu} f(\lambda, \mu, \nu)$と，可逆(reversible)を表すRを用いて，ルール90R(例えば，$f(\lambda, \mu, \nu) = \lambda \text{ XOR } \nu$の時)のように呼ぶことにする。

最初に注意しておくが，このモデルはシンプレクティック条件を満足しない。というよりも，離散的なモデルなので，そもそもシンプレクティック条件を定義することすら困難になる。また微少な摂動というものも無いので，KAMトーラスなる概念は全く存在しようがない。従って無理にハミルトン系の言葉で理解しようと思っても，それは誤解を導くだけである。ハミルトン系との比較は，ダイナミクスの段階ではなく，統計力学の段階で行うべきものなのだ。

我々は，これらのモデルの族に対して，まず次のような形に書ける加法的保存量の有無を調べた。

$$\Phi = \sum_i F(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{i+1})$$

加法的保存量はエネルギーとみなすことができる。状態の離散性から，ERCAにおいてリウヴィルの定理が成り立つことは保証されるので，上記の保存量が存在する系では，統計力学の議論を展開することが可能になる。しかも，ERCAは1次元系なので，転送行列の方法により具体的に分配関数を計算することができる。よって各種の熱力学量も，それを用いて計算することが可能である。その結果と，ダイナミクスによるシミュレーションの結果とを比較すれば，少なくとも平衡統計力学が成立するかどうかについては検証することが可能になる。また，比較的小さな系に対しては，エネルギー面に何個の軌道が存在するかを数え上げることにより，直接，有限系のエルゴード性について調べることができる。

すべてのERCAがこのような保存量を持つわけではない。また，1つのERCAが複数個の加法的保存量を持つという場合もある。さらに注意すべき点は，局所的な量が保存する場合もあり，この局所的保存量は往々にして，エネルギー(加法的保存量)の伝播を妨げる働きをするということである。こうして，ERCAは保存量に関して，i)加法的保存量も局所的保存量も共に存在するもの，ii)加法的保存量は存在するが局所的保存量は存在しないもの，iii)加法的保存量も局所的保存量も存在しないもの，の3つに分類される。簡単な考察から分かるように，統計力学が成立する可能性を持つのは，ii)に属するモデルだけである。

加法的保存量は，上のΦの形に書けるものに限らず，Fが2個のサイトではなく，もっと多数のサイト上の変数に依るものも考えられる。このような量は確かに存在するし，統計力学に重大な影響を持つので重要であるが，これを直接手で確かめるのは非常に面倒であり，出来ていない。これらの量については逆に，期待される熱力学的振舞いからのずれによって，その存在の有無を知るということを考えている。

我々が実際に熱力学的振舞いとして調べたのは，1)部分系のエネルギーに関するカノニカル分布の実現，2)相関関数を用いたアンサンブル平均と時間平均との比較，3)カノニカル分布への緩和の有無，そして

4）熱伝導におけるフーリエの法則の実現の4つである。いうまでもなく，1)，2)は平衡系の性質であり，3)，4)は非平衡系の性質である。その結果分かったことは以下のとおりである。

イ）ERCAは，有限系ではfに依らずエルゴード的でない。即ち，エネルギー面に多数の軌道が混在している。

ロ）それにもかかわらず，局所的な保存量が存在せず，エネルギーの伝播性が保証されているような系（上の分類でⅱ）に属するもの）では，適当な熱力学極限のもとで，部分系のエネルギーに関してカノニカル分布が成立し，また相関関数についても（他の保存量の存在を仮定すれば）平衡統計力学に矛盾しない結果が得られる。

ハ）平衡統計力学が成立する極限の取り方に関しては，空間の大きさ（自由度の数）に対して時間の長さ（シミュレーションに於ける繰り返しの回数）を長くしても収束が良くならないものと，良くなるものの2種類がある。前者は理想気体に相当するもので，後者では，厳密な意味ではエルゴード的ではないものの，次々に新しい状態を作り出す擬エルゴード性（これは感覚的な言葉だが）があるものと思われる。

ニ）非平衡の性質に関しては，ⅱ）に属するモデルの中にも成立するものとしないものとがある。また，それはどのような性質を見るかによって異なる。

以上から分かることは，有限系のエルゴード性という条件は，熱力学的振舞いの成立に関しては厳しすぎるが，無限系がベルヌーイであったとしても，高々平衡統計力学の成立しか保証はしないということである。従って，今後研究すべきことは，ハ）に述べた擬エルゴード性の意味をはっきりさせたり，緩和や熱伝導などの物理現象に対応した，それらを成立させるための力学系に関する条件を純化した形で取り出すことにある。このような研究に対して，可逆なセル・オートマトンは良い対象となるに違いない。

§5　まとめ

大自由度保存力学系と統計力学の基礎に関するいくつかの話題について述べてきたが，未だゴールは遠いと言わざるを得ない。数学的なエルゴード性の概念は，簡単な系に対しては証明されるが，現実的な系の一般の性質に関しては何の情報も与えない。しかも，理想気体の場合にみられるように，有限系と無限系とでは，エルゴード性の意味あいがかなり違ってくるということがある。この点に関して我々は，“物理的な”測度というものについて，もう一度考え直してみる必要がありそうだ。つまり，非平衡系における典型的な初期条件とは何だろうかということである。少なくとも，絶対連続の範囲を越えるものでなければならない。

ハミルトン系の研究は近年発展しつつあるが，2自由度系の問題を別にすると，まだまだ暗中模索の段階のようである。様々な量や概念が提案されてはいるものの，それらの間の関係は不明で，「量に埋もれてしまっている」感もある。それらをうまく組み合わせて，相空間の構造を良く捉えたものの見方を開発する必要がある。

熱力学的振舞いや，統計力学の要であるカノニカル分布の実現を直接見るという立場を，§4で提唱した。最近イタリアのグループも，ハミルトン系を用いて時間平均とアンサンブル平均との比較を行っているが，彼らは微分方程式を用いているので計算が遅く，しかも計算精度を問題にしなければならないため，

なかなか決定的な結果を出すには至っていない。これに比べて，セル・オートマトンでは正確なシミュレーションが可能であり，粗視化の問題もない（無理にボックスに区切るということをしなくてよい）。しかも，ある範囲のモデルをしらみ潰しに調べ尽くすということが出来るので，一般論の構築を目指すことが出来る。従って，可逆なセル・オートマトンは，今後の研究にとって強力な武器となることが期待される。但し，セル・オートマトンの特殊性に依らない，ハミルトン系などにも適用可能な結論を得るためには，かなり突き詰めた解析が必要になるものと思われる。

いずれにせよ，大自由度保存力学系と統計力学の基礎の問題は，これからの研究に負うところが大である。各々の立場からの発展を望みたい。

参考文献

文献は色々あるが，ここではごく基本的なものだけを挙げる。エルゴード理論に関しては，

1) I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Ya. G. Sinai, "Ergodic Theory" (Springer-Verlag, 1982).

が詳しい。無限系のエルゴード性については，1) にも載っているが，

2) J. Moser ed., "Dynamical Systems, Theory and Applications" (Lecture Notes in Physics 38, Springer-Verlag, 1975).

の中に詳しい解説がある。

ハミルトン力学系に関しては，

3) R. S. MacKay and J. D. Meiss ed., "Hamiltonian Dynamical Systems" (Adam Hilger, 1987).

は，基本的な論文を網羅した論文集である。ここに出ていないイタリアのグループの仕事については，

4) G. Paladin and A. Vulpiani ed., "Advances in Nonlinear Dynamics and Stochastic Processes II" World Scientific, 1987).

にまとめて載っている。

筆者の可逆なセル・オートマトンの仕事については，

5) S. Takesue, Phys. Rev. Lett. 59, 2499 (1987).

を御覧いただきたい。