24．急冷されたＴＤＧＬ方程式の早期過程

山梨大教育　豊木博泰

臨界点より上の温度から以下の温度に急冷された系における秩序相の形成過程に対する基礎的モデルとしてＴＤＧＬ方程式を考える。ここでは、秩序変数がn成分ベクトル場の場合に限定する：

$$\partial\psi/\partial t = c\nabla^2\psi - \partial f/\partial\psi\ , \quad f = -\frac{\gamma}{2}|\psi|^2 + \frac{g}{4!}|\psi|^4\ .$$

$n\leqq d$の系に対しては、秩序化過程が位相的欠陥（界面、量子化渦など）の形成過程とその消滅過程という二段階にわけられると考えられているが、このような描像はどのようなパラメータ領域で成り立つのだろうか。これを考察する。

まず、初期には、秩序変数が$\psi=0$付近でゆらいでいたとして、その線形安定性より上のことを考えてみよう。ψがスカラー（$n=1$）の場合は、波数kが$(\gamma/c)^{1/2}$より小さいゆらぎが成長していく。$n=2$のときには、ψを複素数として$\psi=\Psi\exp(i\phi)$と表せば、

$$\partial\Psi/\partial t = c[\nabla^2\Psi-(\nabla\phi)^2\Psi]+\gamma\Psi-(g/6)\Psi^3\ ,$$

$$\partial\phi/\partial t = c(2\nabla\phi\cdot\nabla\Psi/\Psi+\nabla^2\phi)$$

と書ける。この場合も$|\nabla\phi|\sim k$であるから$k\lesssim k_c=(\gamma/c)^{1/2}$のモードが不安定であることがわかる。しかも、$\Psi$の成長速度と$\phi$の秩序化（一様化）の速度を較べると、$k\lesssim k_c$のとき前者のほうが大きいから、$k_c^{-1}$以上のスケールで見れば、位相がランダムなまま振幅が先に平衡値に達することが予想される。それは、k_c^{-1}程度の間隔で渦点（２次元）や渦糸（３次元）が形成されることを意味している。$n=d=3$の系についても同様なことが言える。

不安定なモードが動き始めた後、欠陥ができあがるところまで到達するかどうかを調べるために、平均間隔lの密度で欠陥ができた状態のエネルギーと初期のエネルギーを比較してみよう。$n=1$のとき、界面の法線方向のプロファイルを一次元の定常解 $\psi=\psi_{eq}\tanh(x/\xi)$，$\psi_{eq}=(6\gamma/g)^{1/2}$，$\xi=(2c/\gamma)^{1/2}$で近似すれば、界面のエネルギー密度は$\varepsilon_d=2^{3/2}\gamma^{3/2}c^{1/2}g^{-1}$と得られる。これが$l$の間隔でできているときの平均エネルギー密度$E_d$は $E_d/l^d=f(\psi_{eq})l^d+\varepsilon_d l^{d-1}$ で与えられる。初期のエネルギーEは$E\sim0$であるから、界面のできる条件は$E_d\lesssim0$である。この条件から$l\gtrsim\xi$が結論される。これは、線形安定性の結論と同じである。今のところ、界面の形成過程においてcoaseningがすすまないという保証はないが（つまり、lの上限はおさえられていないが）、界面の運動はlに比例して遅くなるから、初期のlはξ程度と言ってよいであろう。

同様な議論が$n=d=2$，３および$n=d-1=2$の系についてもできて、$l\gtrsim\xi$が言える。これらの系における巨視的な秩序形成は、ξのスケールでみれば、他の係数にかかわりなく、位相的欠陥の消滅過程として捉えることができるのである。