た中での最小の値として，新ためて定義しなおすなどのことをしなければ，非可積分系の波動関数の定量づけにはならないであろう。しかしながら，系が十分カオス的になって飽和した値あるいは可積分近傍でのふるまいは，定性的には変更をうけないものと思われる。

参考文献： S. DeWitt & N. Graham (eds) *The Many World Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press 1973.

46. 量子カオスにおける潜在的混合性

京大・基研　池田研介
京大・理　戸田幹人，足立　聡

カオスの本質は記憶喪失による混合性にある。混合性は，系の非線形性に由来するオリタタミとヒキノバシつまり馬蹄型ダイナミクスに起因する。しかし量子系は本質的に線形系であるゆえ，このような挙動は一見望むべくもない。しかし古典力学の基底に量子力学があるという我々の〝信仰〟（そのようなものを認めるのはアホであるという人もいるかもしれぬ。）を認めるならば，半古典極限（ $\hbar$ ＝プランク定数→0 ）では，何らかのいみでの混合性が量子系にも存在しなければならない。

量子カオス系（その古典版がカオスになる系をこうよぶことにする。）のダイナミクスを実際に計算機シミュレーションによって追跡しようとする試みは Casati らによって始められた。しかし，量子系と古典系の間には予想をはるかに上回る gap が存在した。この現象の1つの解釈はアンダーソン局在（ Prange et.al.）に帰するものであろう。我々のコトバによると，この gap は次のように説明される。カオスでは指数的引き伸ばしが本質的である。位相空間内の object は時間と共にひきのばされ利用可能な領域をうめつくす。ひきのばされた object 間の距離は $\exp-\lambda t$ （ λ ：リアプノフ数， t ：時間）のオーダになる。これがプランク距離 $\sqrt{\hbar}$ に等しいタイムスケールになると， object 上にある波束同志が干渉し合いカオスは劣化し始める。このタイムスケールは $T_r \approx \frac{\log\hbar}{\lambda}$ と極めて短かい。このように量子カオス系は極めて短いタイムスケールで自己劣化する。

カオスには観測という操作が重要である（桁数の勘定といういみで）。ところが量子系では

観測操作自身が系のダイナミクスを本質的に変容させてしまう。我々は前回の講演で観測過程の導入が量子系の自己劣化を阻止し，かえって古典カオスのエルゴード性を完全に回復することを示した。[1] それでは混合性はどうであろうか？残念ながら観測過程には古典的対応物が存在しない。そこで今回は古典的対応物が存在するような外的じょう乱を外界から印加し，量子カオス系が変容してゆく特性によって，量子カオス系に内在する混合性を定量化することを試みた。[2]

混合性を定量化するためには時間反転特性が有用である。系に雑音（大きさ ε ）を印加しつつ系を T step だけ時間発展させる。ついで時間反転し（雑音過程は反転しない。） T step 戻し，初期状態と終状態での差額を測定する。T を適当にえらぶと（厳密には $\log\varepsilon$ より早く大きくする。），この差額は古典可積分系では $O(\varepsilon^2)$ であるのに対し，古典カオス系では $\varepsilon\to 0$ で $O(1)$ の量になってしまうので，カオスか否かをもっとも敏感に反映する量なのである。以下この量を反転不能量とよぶことにしよう。上の事実は外界からの雑音効果は，可積分系では摂動によって取扱い可能で摂動展開の収束半径が $O(1)$ であるのに対し，カオス系では本質的に摂動的取扱いが不能になること（収束半径ゼロ）を表わしている。

さて，我々は kicked rotor 系（古典 version = standard map）をサンプルにとって計算機実験を行った。kicked rotor 系は運動量空間内でおおむね並進対称であるため，運動エネルギによって反転不能量を測ると，それは T に比例する。この比例係数をもって反転不能量 $D_Q(\varepsilon)$ と定義する。さて計算機実験と理論的考察の結果次の結論をえた。

(1) あるしきい値 ε_C が存在し $\varepsilon > \varepsilon_C$ で量子反転不能量 $D_Q(\varepsilon)$ は古典反転不能量 $D_C(\varepsilon)$ に詳細にわたって完全に一致する。

(2) $\varepsilon < \varepsilon_C$ では量子系の本性が顕在化する。第2のしきい値 ε_T ($\ll \varepsilon_C$) が存在し， $\varepsilon_T < \varepsilon < \varepsilon_C$ では $D_Q(\varepsilon)$ は ε に比例して減少する。このことは $\varepsilon > \varepsilon_T$ では摂動論が完全に破綻していることを意味する。

(3) $\varepsilon < \varepsilon_T$ で量子摂動論に一致する結果 $D_Q(\varepsilon)\sim\varepsilon^2$ がえられる。ε_C 及び ε_T は

$$\varepsilon_C = \frac{\hbar}{\delta p} T_r^{-1/2}$$

$$\varepsilon_T = \frac{\hbar}{\delta p} T_s^{-1/2}$$

T_r は雑音を印加されない純粋系の量子古典対応が破れるタイムスケール $\log\hbar/\lambda$ であり，T_s は純粋系の拡散がアンダーソン局在によって飽和するタイムスケールである。 $\delta p \sim D_C(\varepsilon = 0)/\hbar^2$ は波動関数の局在距離で

$$\varepsilon_T / \varepsilon_C \sim \hbar / \delta p$$

従って，ε_C，ε_T は共に極めて大きく夫々に $\hbar^2$，$\hbar^4$ のプランク定数依存性をもつ。

以上の結論の意味するところは次の通りである。即ち，〝きわめて小さい〟$\varepsilon_C \sim O(\hbar^2)$ の外的じょう乱によって，量子カオス系は古典系の混合性を完全に回復する。そして摂動論の収束半径は古典カオスと違って0ではないがきわめて小さい。それは ε_C より更に小さく $\varepsilon_T \sim O(\hbar^4)$ である。従って量子系には古典系と同等の混合性が潜在している訳である。これを顕在化させるためには，外界からごくわずかの摂動を導入するだけでよい。

それでは夫々が自己劣化という病をもつ量子カオス系が結合すると相互作用によって病を克服できるのだろうか？答えはYesであることが最近わかってきた。高次元量子系では系に潜在化していた混合性が顕在化するらしい。その証拠と論拠については文献3）を参照されたい。

参考文献

1） S. Adachi, M. Toda and K. Ikeda, “Recovery of Liouville Dynamics from Quantum Mechanically Suppressed Chaotic Behavior” Preprint RIFP-736 (1988).

2） S. Adachi, M. Toda and K. Ikeda, “Potential for Mixing in Quantum Chaos” Preprint RIFP-741 (1988).

3） S. Adachi, M. Toda and K. Ikeda, “Quantum-Classical Correspondence in High-Dimensional Quantum Chaos” Phys. Rev. Letters に掲載予定。