Phys. Rev. A35, 5228 (1987)

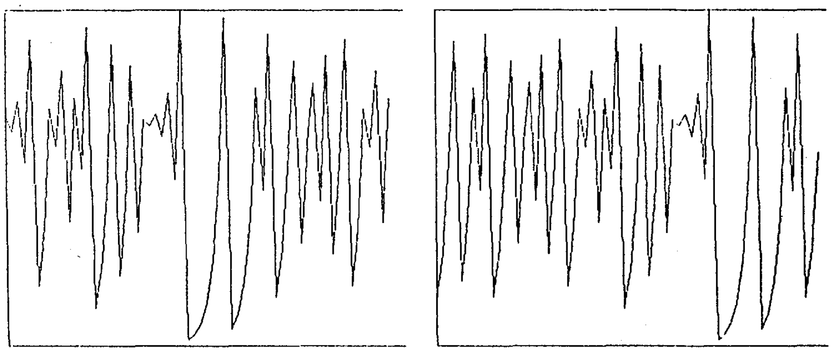
8. J. P. Eckmann and D. Ruelle, Rev. Mod。Phys. 57, 351 (1985)
高安秀樹編、フラクタル科学 3章（朝倉書店、1987）

9. M. C. Valsakumar, K. P. N. Murthy and G. Ananthakrishna J. Stat. Phys 30 617 (1983)

35. テント写像の初期値と周期

静岡大・教養　長島弘幸，馬場良和

1. Introduction



$x_0 = 0.682$　　$x_0 = 0.137$

図－1　テント写像の軌道

簡単な写像によってカオス的な状況を見ようとするとき，Tent-map $f(x) = 2x\ (0 < x < 1/2) = 2(1-x)\ (1/2 < x < 1)$ の初期値 x_0 が，0.24とか0.682とかの有限小数のときの軌道をコンピュータで見るのがてっとり早い（図－１）。これらは，もちろん周期軌道になってしまうが，疑似乱数が乱数のかわりをするように，長い周期の周期軌道はカオス的に見えるのである。この報告では，「同一のけた数の有限小数から出発した周期軌道は，同一の周期軌道になる。」という事実について述べる。つまり，そうした周期軌道はただ一つしかないのである。具体的にいえば，n けたの小数 x_0 から出発した軌道は，周期 $2\cdot5^{n-1}$ のただ一つの周期軌道しか持たない。

2．2進変換の周期軌道

ここでは，初期値 x_0 が有限（10進）小数のときの，2進変換 $B(x)=2x\ (0<x<1/2)$，$=2x-1\ (1/2<x<1)$ の周期軌道について考える。

$$x_0 = 0.a_1 a_2 \cdots a_N = \frac{a_1 a_2 \cdots a_N}{10^N} \quad (0<a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{N-1}<9,\ \ 1<a_N<9\ )$$

とし，分子の高々Nけたの整数 $10^N x_0$ は5を約数に持たないものとする。$2^N x_0$ の分母は 5^N であり，ここまでは周期軌道の外部にあることは明らかである。したがって，初期値 x_0 の分母は初めから 5^N としても，軌道の周期性を考えるときには一般性を失わない。

xの2進変換 $B(x)$は，$B(x)=2x\,(\mathrm{mod}\ 1)$ であることに注意すれば，x_0を初期値とする$B(x)$の軌道の周期 $P(N)$は，$2^{P(N)}/5^N=1\ (\mathrm{mod}\ 1)$，つまり，$2^{P(N)}=1\ (\mathrm{mod}\ 5^N)$ をみたす最小の正整数である。しかし，2は5の原初根であり，かつ，2^4-1が5^2の倍数でないので，2は5^Nの原始根，つまり，$P(N)=\phi(5^N)=4\cdot 5^{N-1}$ である。(1)

さて，分母を5^Nとする$(0,1)$区間の有理数で，5，5^2，…，5^{N-1} を分母とする有理数とはならないものの個数は，有らかに$4\cdot 5^{N-1}$ であるから，これらはすべて同一の周期軌道に属さざるをえない。

以上の結果は，2を原始根にもつ素数pで，$2^{p-1}\neq 1\ (\mathrm{mod}\ p^2)$ となるものについて，容易につぎのように一般化できる。

初期値 $x_0=a/p^N$（または，$x_0=a/2^M p^N$）で，aとpが互いに素$(a,\ p)=1$ であるものについて，2進変換の軌道は周期 $\phi(p^N)=(p-1)\,p^{N-1}$をもち，このような初期値から出発する軌道はすべて同じものである。また，Tent-mapのときには，この半分の長さの周期をもつ周期軌道がただ一つ存在する。

3．Tent-map の周期軌道

Tent-map の場合に半分の長さの周期軌道がただ一つ存在することを示すには次の性質を使う。

同一の初期値より出発したTent-mapの軌道 $\{x_i\}$ と2進変換の軌道 $\{y_i\}$ の間には次の関係が存在する。

$$\begin{cases} x_i > \dfrac{1}{2} \text{ ならば} \quad y_{i+1} \equiv -x_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ 1) \\[2ex] x_i \leq \dfrac{1}{2} \text{ ならば} \quad y_{i+1} \equiv x_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ 1) \end{cases} \tag{A}$$

これは容易に証明できる。（略）

また，次の事実がある。

$$2^{P(N)} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 5^N)$$

において $P(N)$は偶数であるので $P(N) = 2K$とおくと

$$2^{2K} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 5^N)$$

これより $2^K \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 5^N)$ となる。なぜならば，もし $2^K \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5^N)$ となれば $K = \dfrac{P(N)}{2}$ が周期となり，2が5^Nの原始根であるという事実に反する。したがって軌道 $\{x_i\}$ の一周期分の並びは

$$x_{S+1},\ x_{S+2},\ \cdots\cdots,\ x_{S+K},\ (-x_{S+1}),\ \cdots\cdots,\ (-x_{S+K})$$

となる。これと性質(A)と組合わせると容易にTent-map の対応する周期は半分であることが示せる。すなわち上の列の中には1/2よりも大であるものが必ずある。これを x_i とおけば $y_{i+1} \equiv -x_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ 1)$，また $x_{K+i} = 1 - x_i < \dfrac{1}{2}$ であるので $y_{K+i+1} = +x_{K+i+1} = 1 - x_{i+1} = y_{i+1}$となる。またこれが$K$以下の数では一致しないことも自明であるので $\{y_i\}$ は周期Kを持つ。

また，2進変換で $P(N) = 2K$の周期に落ち込んだ初期値と同じ初期値より出発したTent-map の軌道は全て上の周期Kに入ることも明らかである。