

デルは、エネルギーの伝播可能性により、おそらく理想気体と同じような意味での無限系のエルゴード性は満たしていると思われる。つまり、有限系のエルゴード性という条件は、熱力学的振舞いの成立に関しては厳しすぎるが、無限系がベルヌーイであったとしても、高々平衡統計力学の成立しか保証はしないということになる。従って、今後研究すべきことは、緩和や熱伝導などの物理現象に対応した、それらを成立させるための力学系に関する条件を、純化した形で取り出すことにある。この目標を目指して、現在も研究は進行中である。

参考文献：

S. Takesue, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 2499.

22. 多自由度ハミルトン系における転移現象とリヤプノフ解析

東大・教養 小西哲郎

大自由度ハミルトン系の動的性質は、古典統計力学の基礎として、また無限自由度系のKAM理論と関連して興味を持たれる。が、その研究はまだあまりすすんでいない。今回は、その特徴付けをどうやるかを1次元map latticeを例にとり考えてみた。

モデルとしては次のような1次元map latticeをとる；

$$\begin{aligned}
 (p_i, x_i) &\rightarrow (p'_i, x'_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \text{ periodic} \\
 p'_i &= p_i + g(x_{i+1} - x_i) - g(x_i - x_{i-1}), \\
 x'_i &= x_i + p'_i, \\
 g(x) &\equiv \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad K > 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

系を特徴付ける量として今回はLyapunov spectrum (及びLyapunov vector)に着目してみた。これらは大自由度系に特有の量であり、これらが系の相空間構造の情報をひき出してくれることが期待される。

系(1)のLyapunov spectrumをsimulationする。比較対照のため、(1)で x_i を $[0, 1]$ 一様乱数にして得られるrandom Jacobi matrixのLyapunov spectrumを求める。 $K \geq 1$ では両者の形状は一致し、 K の増加とともに直線から上に凸なものになる。一方、 $K \leq 1$ で

研究会報告

は, random matrix の Lyapunov spectrum のへこみ具合は, K を小さくするとある一定値に収束するようにみえるのに対し, 実際の map では K を小さくするとどんどん下に凸になっていく。

この形状差の理由を考えるため, 変数 p の power spectrum と, 解の安定性をみしてみる。

p の power spectrum は, $K \lesssim 0.4$ で $\omega^{-\alpha}$, $\alpha < 2$ の long time tail 型, $K \gtrsim 0.6$ で ω^{-2} で random updation と同じである。($\omega \rightarrow 0$ でのプラトーはない。)

また, 系(1)の fixed points として次の “spiral solution” がある;

$$\begin{cases} p_i = \text{const.} \\ x_i = \frac{2\pi l}{N} i + \text{const.} \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \end{cases}$$

おのおのは K の増加につれて $K_l \equiv [\cos \frac{2\pi l}{N}]^{-1}$ で安定から不安定へと転じる。すなわち, $N \rightarrow \infty$ では $K = 1$ に不安定化点が集積している。よって, $N \gg 1$ では $K = 1$ を境に相空間の構造が変化すると思われる。(実際の simulation は $N \geq 16$) すると, Lyapunov spectrum が random matrix に比べて著しく下に凸であるということは, 相空間内でうまい方向を狙わないとよく伸びていかないということであり, それは KAM 領域やその残がいひっかかっている状況があらわれているものと推定される。しかしこれはまだ状況証拠的なものでしかなく, 積極的主張のできるデータが欲しいところである。

さて, この系は全運動量 $\sum p_i$ を保存するので, 全系を形式的に「部分系」+「熱浴」とみて, 統計力学が成り立っているかどうかをみることができる。KAM 領域の体積を無視し, 各 p_i が一様に分布すると仮定すると, 部分系の運動量分布の表式が求まる。この分布への漸近の様子でエルゴード性と混合性をみることができる。

実際に計算した範囲内 ($0.2 \leq K$) で, この系はエルゴード性と混合性を示す。エルゴード性の達成される様子は K が小さい時には “間けつ的漸近” になるが, このふるまいとリヤプノフ数の時間変化は関係がない。部分系だけのリヤプノフ数を定義してみるとよいかもしれない。

混合性は

$$\mu(\phi^t A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \propto \exp(-r_{AB} t)$$

のようにして達成される。 r_{AB} とリヤプノフ数 or エントロピーとの関連は不明である。

リヤプノフ数などの力学的量が輸送現象とどの程度結びつくのか興味深い。

[文献]

K. KANEKO and T. KONISHI, J Phys. Soc. Japan **56** (1987) 2993.

K. KANEKO and T. KONISHI, in preparation

24. 一次元非線形クラインゴルドン 方程式のソリトンと第3積分

京大・工 石 森 勇 次

ハミルトン力学系のカオスを理解する上で、エネルギー以外の保存量はいくつ存在するかは重要な鍵である。少数自由度系では数値計算により視覚的に調べることができるが、波動系のような多自由度系では一般に困難である。本研究では、ソリトン解を手がかりに保存量特に第3積分の存在を調べる一つの方法を示した。

ハミルトン系としてラグランジアン

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 - \frac{1}{2} \phi_x^2 - U(\phi) \right], \quad (1)$$

で記述される一次元非線形クラインゴルドン方程式を考える。ソリトン解を持つポテンシャル $U(\phi)$ として代表的なものに

$$U(\phi) = 1 - \cos \phi : \text{サインゴルドン}, \quad (2)$$

$$U(\phi) = \text{sech}^2 R (1 - \cos \phi) + \frac{1}{4} \tanh^2 R (1 - \cos 2\phi),$$

$$0 \leq R < \infty : \text{ダブルサインゴルドン}, \quad (3)$$

$$U(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 : \text{ファイ4乗}, \quad (4)$$

がある。サインゴルドン方程式は可積分系としてよく知られた系であり無限個の保存量を持つ。非線形クラインゴルドン方程式は、ポテンシャル $U(\phi)$ の形によらず常に2つの保存量を持つ。第1番目は運動量

$$J_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_t \phi_x, \quad (5)$$