

20. Rule dynamicsにおけるファジーアトラクタ次元

早大・理工 相 沢 洋 二
麻布大・獣医 永 井 喜 則

2状態3近傍セルオートマトン系では、パターンの時間変化（パターンダイナミクス）は5つの基本ルールの組合せで記述できる。ルールダイナミクスは、これら5つの基本ルールの組合せで張られる空間内での、ルールの時間変化である。こうして組立てられたルールダイナミクスはパターンダイナミクスの上位階層を形成している。

1つのルールがつくるセルオートマトン系のパターンは多数あるので、あるルールダイナミクスがつくるパターンダイナミクスを記述するアトラクタはファジーな構造をもっている。ここではルールダイナミクスのつくるパターンダイナミクスのファジーアトラクタの性質について考察する。

われわれはパターンダイナミクスにおけるオートマトン系の平均活動度

$$\langle S \rangle_{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(\tau) \quad (1)$$

（ $S_i(\tau)$ は各セルの状態で $[0, 1]$ の値をとる。 n はセルの総数）

を各基本ルールをスイッチングするためにルール空間にフィードバックさせてルールダイナミクスをつくり出す方法によって、現在主に研究している。このようにしてつくられたルールダイナミクス系には、インターミッテントなルール変化するものが見出されている。その例を図1に示す。

図1の下段に示されているのがセルオートマトン系の平均活動度である。セルオートマトン系のパターンダイナミクスを平均活動度というスカラー量で調べ、そのアトラクタを描いたものが図2である。見て判るように数個の領域に区分けが可能なファジーなアトラクタになっている。

このファジーなアトラクタを形成する平均活動度の時系列を Grassberger と Procaccia (G-P) の提唱した相関次元¹⁾(D_2) により解析した。図3にいくつかの埋め込み次元(d)に対する相関積分

$$C(\epsilon^2) = \frac{1}{N_{\text{ref}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{ref}}} \frac{1}{N_{\text{data}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{data}}} \theta(\epsilon^2 - |\langle \vec{S} \rangle_i - \langle \vec{S} \rangle_j|^2) \quad (2)$$

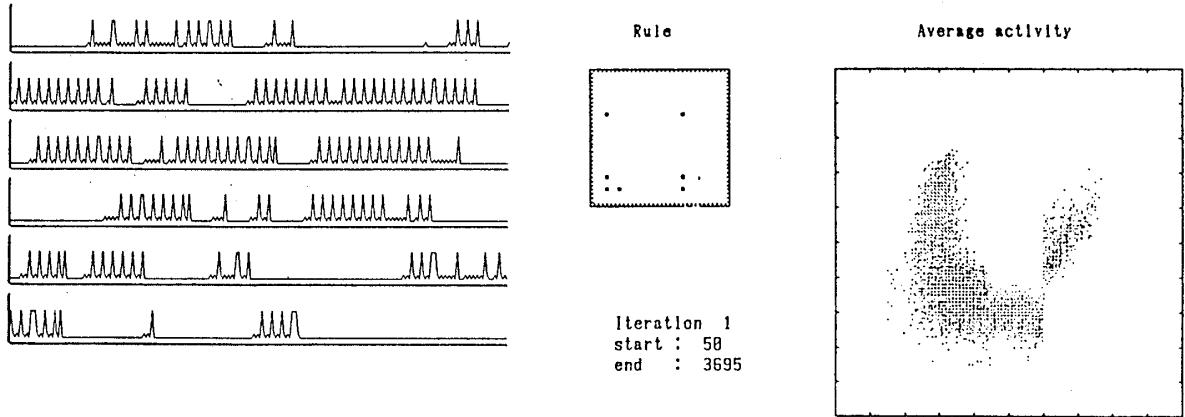


図2 インターミットルールダイナミクスの平均活動度のアトラクタ。左がルールのリターンマップ、右が平均活動度のリターンマップである。50 ステップまでの過渡期を除いて描いてある。

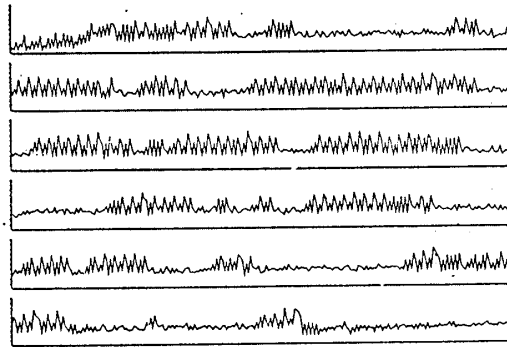


図1 インターミットルールダイナミクスの例。上はルールの時間変化，下は平均活動度の時間変化である。

を示しておく。ここで N_{ref} は相関積分を計算するサンプル点の数、 N_{data} は時系列データの総数、 $\langle \vec{S} \rangle_j$ 、 $\langle \vec{S} \rangle_i$ は一次元時系列から構成された d 次元ベクトル、そして $\theta(\dots)$ はヘビサイドの階段関数を表わしている。また、(2)式の相関積分は計算時間をより短くするようにもととのG-P法を改めたものである。(2)式より求まる相関次元はもともとのG-P相関次元の半分の値である。

図3をどのように見るかは異論が多々あろうが、敢て収束していると思われる領域に直線を引いてみた。埋め込み次元に対する相関次元の変化を描いたものが図4である。図2に示したファジーアトラクタの相関次元は、 $D_2 \sim 1.14$ である。図4にはインターミットルールダイナミクスの他に、 $F(4)$ という一つのルールだけによるアトラクタの相関次元、基本ルールのスイッチング領域が複数個あるマルチゲートルールダイナミクスの1つのファジーアトラクタの相関次元も示されている。

図4から判ることは、ルールダイナミクスを構成するルールの数が、 $F(4) <$ インターミッ

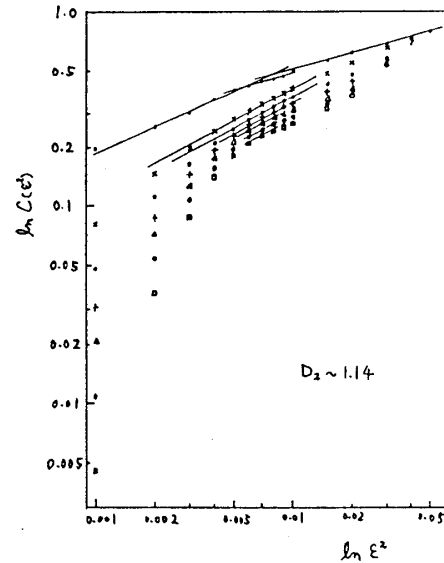


図3 図2に示したファジーアトラクタの相関積分。埋め込み次元 d は上より 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10 である。

テント<マルチゲートの順に多くなっているのに対して、ファジーアトラクタの相関次元は逆に減少しているという事実である。この事実に対する説明に関して今の所われわれは考えをもっていない。今後の課題として残っている。

引用文献

- 1) P. Grassberger and I. Procaccia,
Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 346-349.

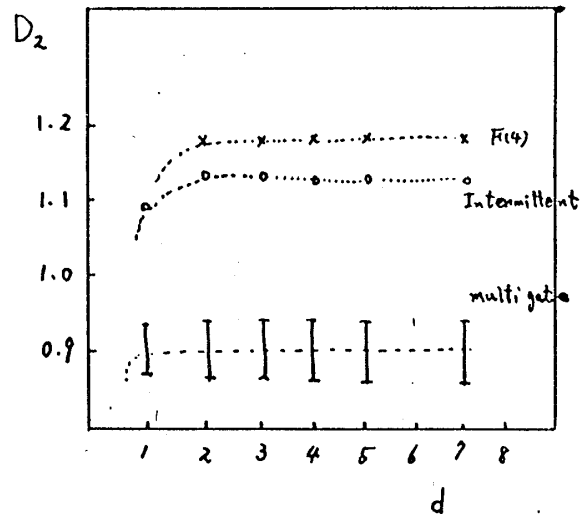


図4 いくつかのファジーアトラクタの相関次元。 $F(4)$ 、インターミットtent、マルチゲートの3種類に対して、相関次元の埋め込みによる変化が描かれている。

21. 可逆なセル・オートマトンと統計力学

東大教養 武末真二

前年に引き続いて、可逆なセル・オートマトンを用いた統計力学の基礎の研究について、新しい結果を報告した。

可逆なセル・オートマトンは、その状態の離散性のために、自動的にリウヴィルの定理を満たす。また、ある場合には、エネルギーとみなすことができるような保存量（加法的保存量）を持つことが分かっている。従ってその場合、形式的に統計力学の議論を展開することができ、統計性の動力的根拠（エルゴード問題）という、古典的ではあるが未解決の問いを発することが可能になる。しかもセル・オートマトンの特性により、しらみつぶすと数え上げの手法によって、ある程度一般的なクラスのモデルたちを分類することが出来る。そしてこの分類は、一般論の構築に対して大きな手がかりとなるであろう。また、実数概念が登場しないので、シミュレーションを行うにしても正確なシミュレーションが可能であり、少なくともシミュレーションそのものに誤差がはいりこむ心配はない。（もちろん統計誤差は存在する。）

以上のような考察に基づき、簡単なモデルの族（Elementary Reversible Cellular Automata 略して ERCA と呼ぶ）を用いて、これらがどういう熱力学的振舞いを示すかについて分類を行った。ERCAは、次式で定義される。