

15. フィードバック制御系における 分岐現象とカオスの研究動向

神戸大・工 平 井 一 正

1. はじめに

この小文は、フィードバック制御系における分岐現象とカオスの研究動向を、制御工学以外の分野の方を対象として概説するものである。

制御系本来の立場からは、フィードバック構造を考慮した解析法がのぞましい。以下のべる分岐現象の解析はそのような立場で行なわれるが、カオスの解析はそのような方法では解析が困難で、どうしても微分方程式から出発した解析法となる。

2. 分岐現象

図1に示す非線形フィードバック系を考える。

$u, y \in \mathbf{R}^1$ とする。以下示すように制御対象の伝達関数 $G(s)$ と非線形要素 $f(\cdot)$ を独立に扱って解析することが、制御系に特有の方法である。

2.1. Hopf 分岐^{1)~2)}

$r = 0$ とする。平衡点は $G(0)f(x) = -x$ の解 $x = \bar{x}$ である。このとき $f_1 = \partial f(x)/\partial x$ at $x = \bar{x}$ とすると、 $G(j\omega)$ のナイキスト軌跡が、図2(a)のように、 $\omega = \omega_0$, $\mu = \mu_0$ (μ : システムパラメータ) で P 点 ($-1/f_1 + j \cdot 0$) を通るとき、 $\mu = \mu_0$ で Hopf 分岐が発生することがわかる。 μ が μ_0 に近い場合には、図2(b)のように、P 点から半直線 $\Gamma: -\frac{1}{f_1} - a_1^2 \zeta(\omega_R)$ を a_1 をパラメータとして引いたとき、 $G(j\omega)$ との交点 (a_1, ω) が周期解の振幅と角周波数を与える。ここで $\zeta(\omega) = -G(j\omega)h(\omega)$ で $h(\omega)$ は $f(\cdot)$ の第1, 第2, 第3の偏微係数を含む有理関数である。

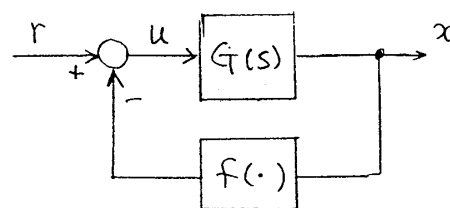
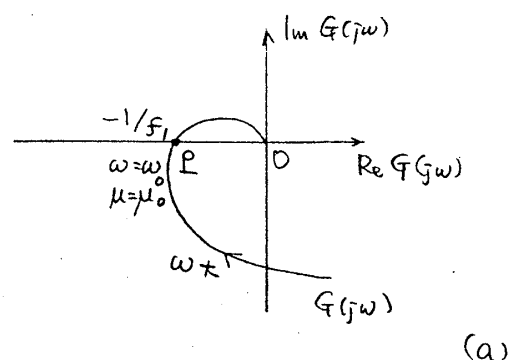
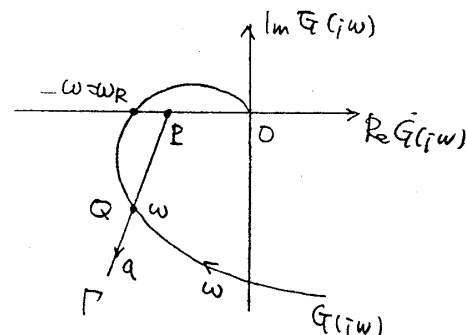


図1 フィードバック制御系



(a)



(b)

図2 Hopf 分岐の解析

2.2. サドルノード分岐³⁾

図1で $r = A \sin \omega t$ としたとき系に発生する周期振動に発生するサドルノード分岐をしらべる。系の出力を $x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$ と仮定し, 非線形特性 $f(\cdot)$ を記述関数 $N(X)$ で置きかえると

$$X(j\omega)/R(j\omega) = 1/(G^{-1}(j\omega) + N(X))$$

となる。ここで, $G^{-1}(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$, $N(X) = \xi(X) + j\eta(X)$ とおき, 絶対値をとると

$$F(X) \triangleq X^2 \{(\alpha + \xi)^2 + (\beta + \eta)^2\} - A^2 = 0$$

$F(X) = 0$ は X に関する平衡平面と考えられるので, この式と, $\partial F / \partial X = 0$ より X を消去すれば, パラメータ空間におけるサドルノード分岐集合が得られる。

例 図3に示す飽和要素の場合,

$$\xi(X) = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{D}{X} + \frac{D}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{D}{X} \right)^2} \right]$$

であり, これを使って各種パラメータ平面における分岐集合を求めると図4のようになる。図で破線は, ここで発生する X の分岐が, X の小さい値から大きい値に分岐することを示す。たとえば図4(c)図によって, $X-D$ 平面における分岐状態を図5に示す。

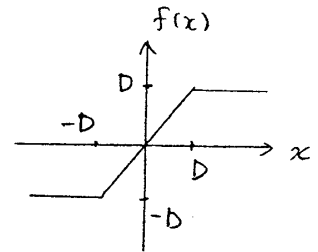
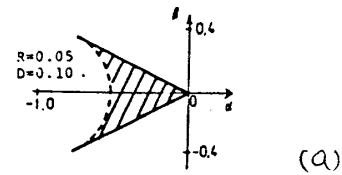
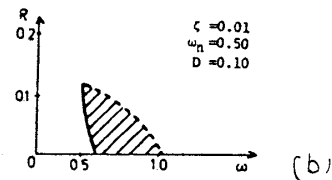


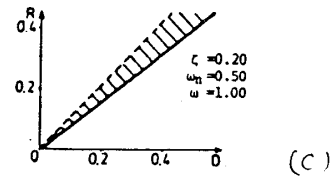
図3 飽和要素



(a)



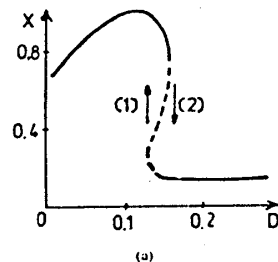
(b)



(c)

図4 分岐集合

- a) $\alpha-\beta$ 平面 ($G(s)$: 任意, $G(j\omega)$ 軌跡をプロット)
- b) $R-\omega$ 平面 ($G(s) = 1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ の場合)
- c) $R-D$ 平面 (" ")



(a)

図5 飽和のある制御系の分岐現象

$$R = 0.13, \quad G(s) = 1/(s^2 + 0.01s + 0.25)$$

3. カオス

種々な非線形制御系にカオスが発生することが報告されている。ここではその2, 3について説明する。

3.1. デジタル制御系

図7に示すサンプル値制御系に発生するカオスについて説明する。図

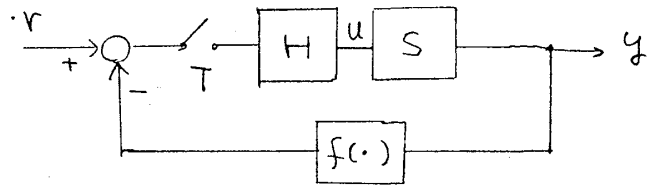


図6 サンプル値制御

6でHはホールダ, Sは線形システムである。Sは

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \quad y = cx(t), \\ x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^l, \quad y \in \mathbf{R}^m, \quad r \in \mathbf{R}^l \text{ (一定)}, \quad \det A \neq 0, \\ (A, b) &: \text{可制御対} \end{aligned} \quad (1)$$

で表わされる。いまHを0次ホールダとすると, 全体システムは

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT} x(k) + A^{-1}(e^{AT} - I)Bu(k) \\ y(k) &= cx(k), \quad u(k) = r - f(y(k)) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表わされる。

$y, u \in \mathbf{R}^1$ のときの分岐集合については, すでに報告がある。ここではカオスについて最近の結果を報告する。

1) カオスの存在定理⁴⁾

(1)式を次のように変形する。 $f \in \mathbf{C}^1$ とする。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &\triangleq \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (c_1, c_2)x(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}, \quad A_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}, \quad n = n_1 + n_2, \quad A_1 (A_2) \text{ の固有値はすべて正 (負)}$

このとき

$$x(k+1) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))^T \quad (4)$$

ただし

$$g_i = e^{A_i T} x_i + A_i^{-1}(e^{A_i T} - I_i) B_i (r - f(y(k)))$$

(4)式のカオスの存在に関し、次の定理が示される。

定理 1

(4)式より得られる方程式

$$x_1(k+1) = e^{A_1^T} x_1 + A_1^{-1}(e^{AT} - I_1)B_1(r - f(cx_1)) \quad (5)$$

を考える。(5)式に不動点 $\bar{v}_i$ が存在し、 $\det DF_1(v_i) \neq 0$ ($i = 1, 2$)、 $F_1(x) = x_1 + A_1^{-1}B_1(r - f(cx_1))$ とする。このとき(5)式に snap-back-repeller が存在するならば、任意の $\|B_2\| < \varepsilon$ と $\|C_2\| < \varepsilon$ に対して、(4)式にカオスが存在する。もし f が区分的線形の場合は、 B_2 の値に関係なく $\|C_2\| < \varepsilon$ であれば同様のことが成立する。

2) カオスと周期解の共存⁵⁾

図7で、 H を1次ホルダ、 $f(y) = y^3$ 、 S を

$$\dot{x} = ax + bu, \quad y = x, \quad r = 0, \quad (x \in \mathbf{R}^1)$$

とする。 $a = 3$ 、 $b = 1$ のとき、不動点のサンプリング周期 T に対する分岐図を初期値をかえて示すと、図7の a) ~ c) のようになる。初期値によって周期解とカオスが共存するいわゆる共存現象がみられる。

H を0次ホルダとし、 $f(y) = m \tanh y$ (飽和特性)としても、同じ S に対してカオスと周期解の共存現象が発生する。

3.2. その他の制御系

図8に示されるモデル規範型適応制御系は、誤差 e をゼロにするように制御して、規範モデルに適応するようにプラントを動かすシステムである。 e に関する方程式が非線形となり、このシステムに分岐現象やカオスが発生することが、最近報告されている⁶⁾

図9に示すコントローラをデジタル化した制御系において、デジタル化にともなう丸

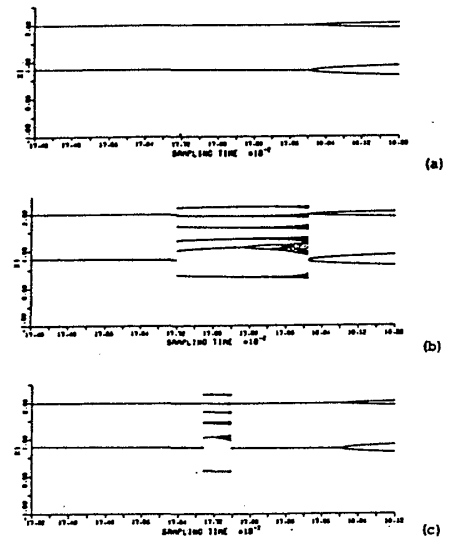


図7 カオスと周期解の共存

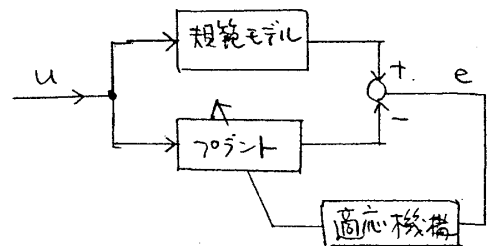


図8 モデル規範型適応制御系

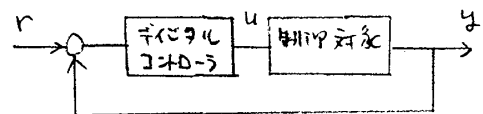


図9 デジタル制御系

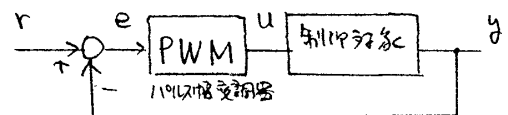


図10 パルス幅変調制御系

め誤差があるときは、この系にカオスが発生する⁷⁾

このほか、図 10 のようなパルス幅変調 (PWM) 制御系にもカオスが発生する。PWM への入力信号が、サンプリング周期ごとにサンプルされ、その入力大きさに比例して、ある期間方形波パルスを出力する。もし PWM への入力がある値をこえると、方形波パルスの出力期間が飽和する。この飽和に起因するカオスが発生するわけであるが、この場合、カオスとカオスの共存現象もみられる⁸⁾

4. おわりに

フィードバック制御系に発生する分岐現象とカオスの研究の一端を紹介した。種々御討論いただいた本学潮俊光君に感謝する。

文 献

- 1) A. I. Mees : *Dynamics of Feedback Systems*, John Wiley, 1981.
- 2) 平井, 潮 : 非線形振動問題における最近の話題, 計測と制御, 25, (昭 61.) 7.
- 3) K. Hirai et al : Catastrophic jump phenomena in a nonlinear Control System, Trans. IEEE, AC-26, 601 / 603, (1981).
- 4) T. Ushio, K. Hirai : Chaotic behavior in piecewise-linear sampled data Control Systems, Int. J. Nonlinear Mech., 20, 5 / 6, 493 / 506, (1986).
- 5) 平井, 近藤 : サンプル値制御系における周期解とカオスの共存, 電通信学会技報, NLP 87-12, 1987.
- 6) I. M. Y. Mareels, R. R. Bitmed : Nonlinear dynamics in adaptive Control; chaotic and periodic stabilization, Automatica, 22, 6, 645 / 655, (1986).
- 7) T. Ushio, C. S. Hsu : A simple example of digital control system with chaotic rounding errors, Int. J. Control, 38, 5, 1023 / 33, (1983).
- 8) 潮, 平井 : パルス幅変調制御系におけるカオス, 計測自動制御学会論文集, 21, 6, 539 / 545, (1985).