

地域間距離と地域の形

筑波大学社会工学研究科 栗田 治

筑波大学社会工学系 腰塚武志

1. はじめに

都市計画や施設配置計画を定量的な方法で立案しようとする時、平面的に分布する点（人や施設）を元にして2点間距離の平均（一般的にはモーメント）を問題にすることがしばしば必要となる。施設配置問題の典型であるWeber問題[Cooper, 1961]およびこの枠組みに則った数多くの研究は、施設点から利用者点群への平均距離を目的関数としている。また交通計画でのゾーン間の距離設定は、詰まるところ2つの地域間の平均距離であるといえる。

ここで、上述のような分析の大きな特徴は、離散的に分布する点（人口や施設）をそのまますべて抽出することが（データの膨大さ、分析の手間の両面で）不可能である、ということであろう。このため、都市平面をある枠組みで分割して複数の地域を設け、その地域それぞれに含まれる点数を基礎データとする、というのが最も一般的である。国勢調査調査区データ、各種のメッシュデータ、市町村別人口データ、あるいは交通量データなどは最も卑近な例として挙げられる。

このような地域内のデータの場合、点の総数は分かっているが、個々の点が現実にはどう分布しているかは不明であるから、平均距離の計算にはなんらかの想定が必要となる。その最も簡単なものは、与えられた地域内で点が一様に分布している、と想定するものである。この一様分布の想定は一見かなり強いものに見える。しかし、ごく小さな地域を考えれば妥当である場合が多いであろう。また一様分布の下で算出した値がある種の目安となることも十分に考えられるので、これにこだわることには意味があるに違いない。そこで本稿では、固定された一点Pから地域A内の一様な点への平均距離（図1-a）および地域A内の一様な点から地域B内の一様な点（2点は互いに独立とする）への平均

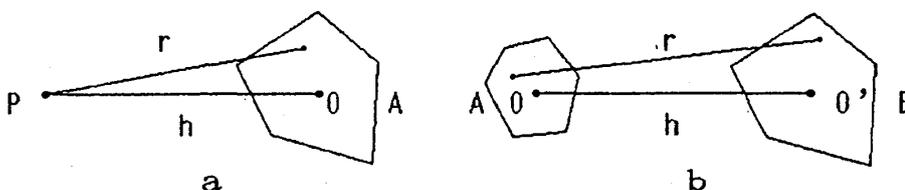


図1 平均距離を考える対象

距離（図1-b）を問題にする。

さて、図1のようなケースでの平均距離を式の形で求めるのはそれほど容易なことではなく、いくつかの限られたケースでしか導出されていない。まず、一点Pから地域Aへの平均距離に関しては、円盤Aの外部に点Pがある場合を[Schweitzer,1968]が、円盤Aの内部に点Pがある場合を[腰塚,1977]が、点Pから矩形Aへの場合を[Love,1972]が各々に導出している（ただし[Love,1972]の計算には誤りがある）。つぎに地域Aから地域Bへの平均距離に関しては、2つの地域が重なり合う同一の矩形である場合およびA、Bがチェス盤の接触する2つの正方形である場合を[Ghosh,1951]が導出した。[Schweitzer,1968]はA、Bが重なり合う同一の円盤である場合に求めた。また[Bouwkamp,1977]はA、Bが互いに交わらない2つの円盤である場合に導いている。

これら式の形で導かれたものを、地域が一般の不定形であるばあいに適用することもある程度は可能である。実際、地域が円盤の場合と正方形の場合とで（面積を等しくして）較べてみると平均距離はかなり似通っており、このことから推しても、現実の地域が比較的等方的な場合には役立つであろう。しかし、地域がかなり歪んだ形の場合に（誤差に見当を付けながら）応用するには固有の技術が必要となり、汎用性にかける。また、式の形で結果はどれも複雑な関数形をしているため（特に円盤が関係すると超幾何関数が含まれる）、電卓で手軽に計算してみよう、といった利用法にも無理がある。そこでこれらの平均距離の近似式を一般的かつ簡単な形で導くことが重要であることが分かる。

以下では、まず2節で[Vaughan,1984]の平均距離近似法を紹介し、東京23区で近似精度を検証した結果を示す。同時に、各地域（区）を同面積の円であると想定する少々乱暴な近似式の精度がかなり良いことも検証される。3節ではこれら近似式のある部分に現われる、2つの地域の大きさと相対的な位置関係を表わす指標について若干考察する。続いて4節では、地域が円周で与えられる場合の近似式を導出し、いくつかの応用例に触れることにする。

2. 平均距離の近似式[Vaughan,1984]

地域Aから地域Bへの場合で説明する（一方が点であってもまったく同様の方法で説明できる）。A, Bの幾何重心を各々 $0, 0'$ とする。また $h = \overline{00'}$ としよう。A内の点は 0 を原点とする直交座標系で (x, y) , B内の点は $0'$ を原点とする直交座標系で (u, v) とする（図2）。このとき $p_1 = u - x$, $p_2 = v - y$, ならびに $q^2 = p_1^2 + p_2^2$ とおけば, (x, y) から (u, v) への距離 r は

$$r = \sqrt{(h + p_1)^2 + p_2^2} = h \sqrt{1 + 2p_1/h + q^2/h^2}$$

となり, その平均距離を \bar{r} とすると

$$\bar{r} = \int_A \int_B r \, du dv dx dy / (S_A S_B) \quad (1)$$

である（ただし S_A, S_B は各々の地域の面積）。

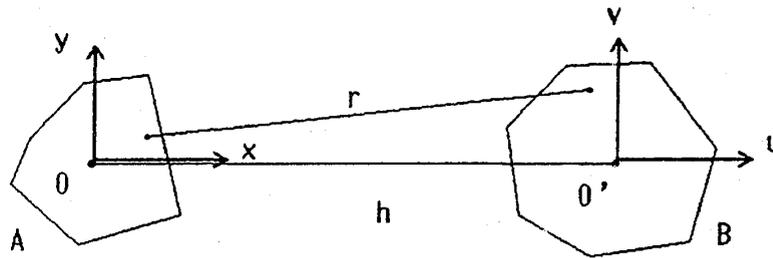


図2 $(x, y) \in A$ から $(u, v) \in B$ への距離 r

ここでLegendre多項式

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n = 1 / \sqrt{1 - 2tz + t^2} \quad (|z|, |t| < 1)$$

を導入する（括弧内は母関数の収束条件。詳しくは, 例えば[森口他,1960]あるいは適当な物理数学のtextを参照）。いま $f(t) = \sqrt{1 - 2tz + t^2}$ とすればその t による微分は

$$f'(t) = (t - z) \sum P_n(z) t^n = \sum P_n(z) (t^{n+1} - z t^n)$$

である。このとき $f'(\tau)$ を $[0, t]$ で積分し, 変形・整理すれば, $f(t)$ の t による展開式が

$$f(t) = 1 - zt + \sum g_n(z) t^{n+1}$$

と与えられる。ただし, $g_n(z) = \{P_{n-1}(z) - P_{n+1}(z)\} / (2n+1)$ であり,

$$g_1(z) = (1 - z^2)/2, \quad g_2(z) = (z - z^3)/2, \quad \dots$$

といった具合になっている。ここで便宜上 $t = q/h, z = -p_1/q$ とすると（ただし $q \geq 0$ ）

$$r = h \cdot f(q/h)$$

$$= h[1 + p_1 h^{-1} + (p_2^2/2)h^{-2} - (p_1 p_2^2/2)h^{-3} + \dots]$$

と r が展開される (右辺が r に収束する条件は $q < h$)。したがって、平均距離 \bar{r} は (1) により

$$\bar{r} = h[1 + (\mu[p_2^2]/2)h^{-2} - (\mu[p_1 p_2^2]/2)h^{-3} + \dots] \quad (2)$$

となる ($\mu[\cdot]$ は $A \times B$ 上での平均値。また $0, 0'$ が各地域の重心だから h^{-1} の係数は $\mu[p_1] = \mu[u-x] = 0$)。

この方法によって円盤 A から円盤 B への平均距離を、各々の半径が α および β のときに求めると

$$\bar{r} = h[1 + \{(\alpha^2 + \beta^2)/8\}h^{-2} + \{(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)/192\}h^{-4} + \dots] \quad (3)$$

が得られる (煩雑なので計算過程は割愛)。

また同様の方法で図 3 のような 2 つの矩形について平均距離を求めてみると次式のように得られる:

$$\bar{r} = h[1 + \{(\alpha_1^2 \sin^2 \omega + \beta_1^2 \cos^2 \omega + \alpha_2^2 \sin^2 \theta + \beta_2^2 \cos^2 \theta)/6\}h^{-2} + \dots] \quad (4)$$

ただし、(4) の h^{-3} の係数は 0 である。また -4 乗以上の項についてはかなり煩雑なので割愛する。

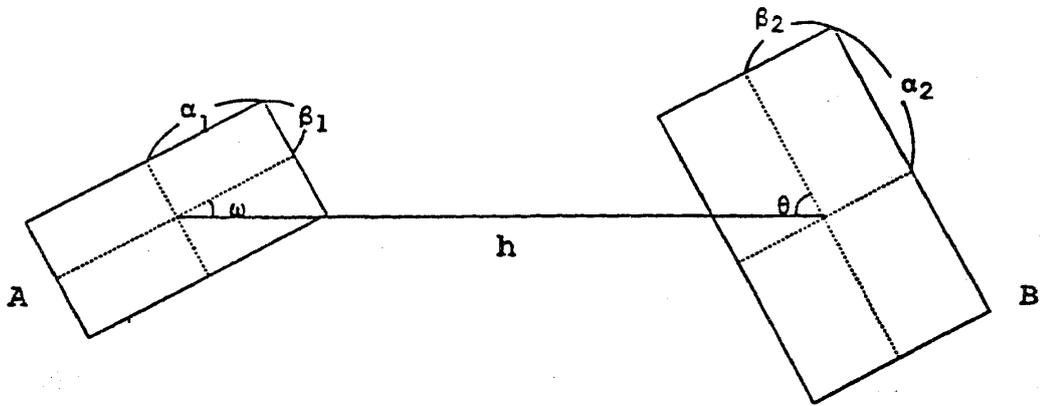


図 3 2 つの矩形の位置関係

さらに A, B が一般の不定形の場合、(2) の μ の部分は x, y, u および v の多項式の平均値であるから、平面上の Green の定理によって、地域 A および B の周回積分に帰着し、算出できる (地域が多角形で近似され、頂点座標が与えられる必要がある)。例えば、地域 A の頂点の座標が適当な直交座標系で、反時計回りに

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$$

と与えられているとする。

このときAの周を C_A と表わすことにすると、地域の面積 S_A は

$$S_A = \int_A dx dy = \oint_{C_A} x dy \quad (\because \text{Greenの定理})$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \int_{(x_t, y_t)}^{(x_{t+1}, y_{t+1})} x dy = - \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1} - x_t)(y_{t+1} + y_t) / 2$$

となる (例えば[腰塚他, 1986]参照). 重心座標 (x_G, y_G) は, これをもとに

$$x_G = (1/S_A) \int_A x dx dy = (1/S_A) \oint_{C_A} (x^2/2) dy$$

$$= (1/S_A) \sum_{t=0}^{n-1} (y_{t+1} - y_t)(x_{t+1}^2 + x_{t+1}x_t + x_t^2) / 6$$

と導出される (y_G も同様). このように重心座標が算出されるので, 図2に示したような座標系および頂点座標が一意に設定される. こうして設定された頂点座標について μ の部分 ($x^i y^j u^k v^l$ の平均値に関係した量) を計算するのであるが, これが各地域の周回積分に帰着することは明かである.

以上[Vaughan, 1984]を紹介し, その方法による矩形から矩形への近似式の導出結果をつけ加えて述べた.

さて上述の展開式(2)の精度を見るために, 東京23区を多角形近似によってデータ化し地域 A_1, \dots, A_{23} を設けた (ディジタイザーで計測). そして, すべての地域ペア $A_i, A_j (i \neq j)$ についてある項までとった近似式を2通りに

$$\bar{r}' = h[1 + (\mu [p_2^2] / 2) h^{-2}], \quad (5)$$

$$\bar{r}'' = h[1 + (\mu [p_2^2] / 2) h^{-2} - (\mu [p_1 p_2^2] / 2) h^{-3}] \quad (6)$$

と設定し, その値を算出した (253ペア). 一方, 各地域に500m間隔の格子点を打ち, この点を用いて算出した地域間平均距離 \bar{r}^* を真値 \bar{r} とみなすことにする (図4, ただし図中の大きな点は区の重心).

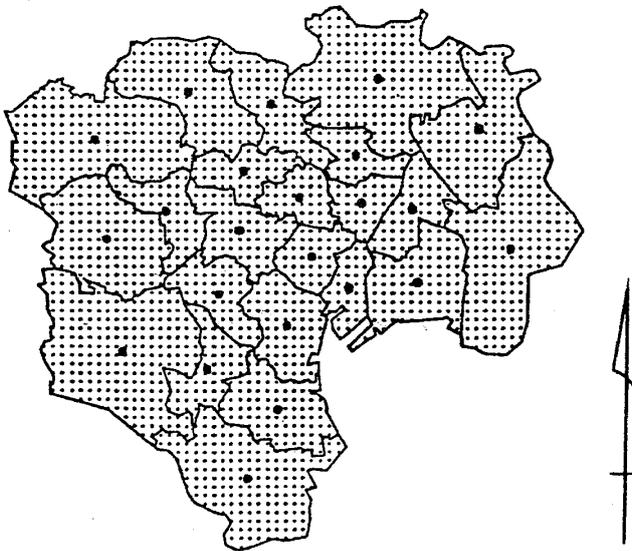


図4 東京23区と500m間隔の格子点

こうして \bar{r}^* と \bar{r}' との関係をプロットしてみると図5-aおよび図5-bのようになり, 近似式(5)および(6)の精度はかなり良いことが分かる. なお, 比較のため \bar{r}^* と重心間の距離 h との関係を図5-cに示しておく.

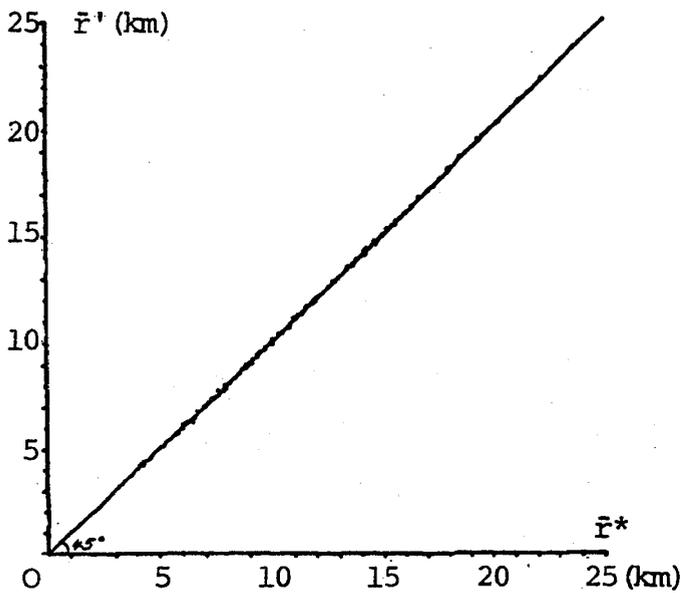
これらの近似式を算出するには, このように各地域の座標を計測することが必

要であり、少々手間がかかる。そこでより簡便な方法として、各領域を等面積の円盤で近似し、

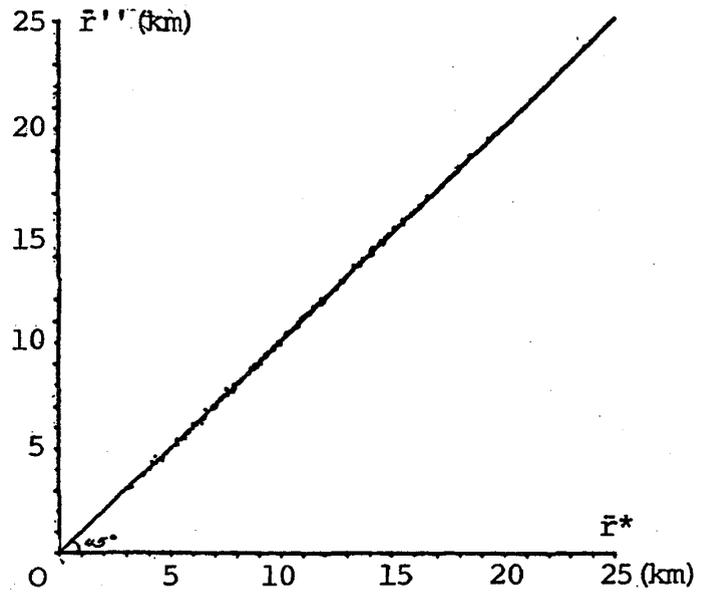
$$\bar{r}^c = h[1 + \{(\alpha^2 + \beta^2)/8\}h^{-2}] \quad (7)$$

$$\bar{r}^{cc} = h[1 + \{(\alpha^2 + \beta^2)/8\}h^{-2} + \{(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)/192\}h^{-4}] \quad (8)$$

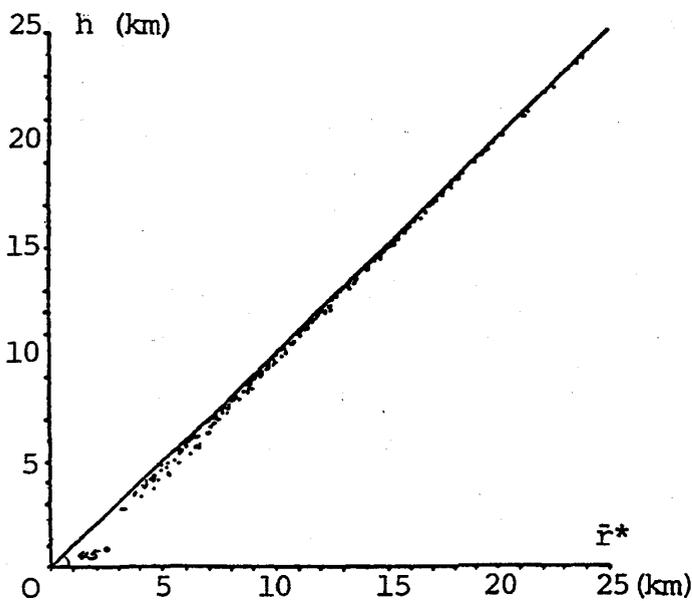
についても算出してみたが、この精度もかなり良い(図6-a, b)。このことから近似式(5)や(7)が実用的に役立つであろうことが確認された。



a \bar{r}^* と \bar{r}' との関係



b \bar{r}^* と \bar{r}'' との関係



c \bar{r}^* と h との関係

図5 各区の頂点座標を用いた近似式の精度

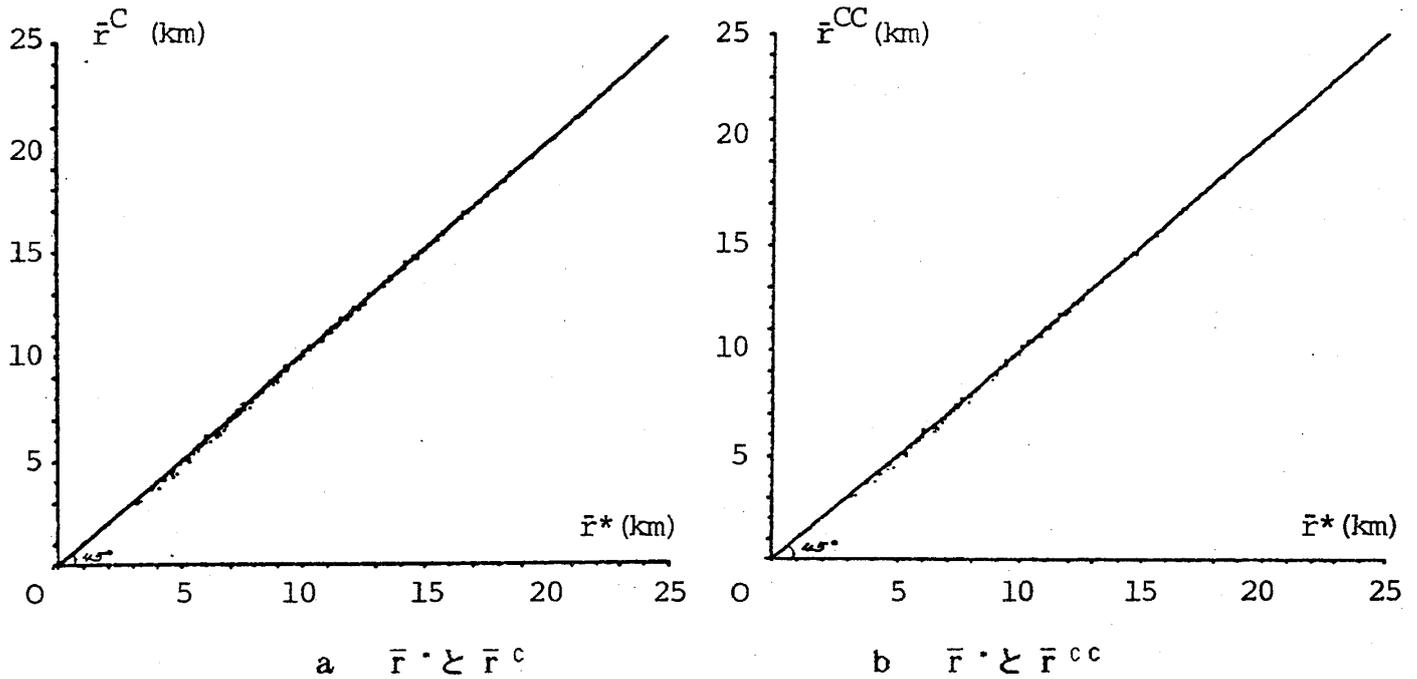


図6 各区を等面積の円盤とみなした近似式の精度

3. 平均距離と地域の形

(2)の展開式を見れば分かるとおり、大括弧内の h^{-2} の係数は $\mu [p_2^2]/2$ であり、これは地域A, Bのどちらかの面積が0でない限り正である。つまり、平均距離は重心間距離を上回る値となっている。また、展開式から低次の項を取り出して設けた近似式を東京23区に適用した例を見ると(図5, 図6), いずれの値も似通っており、-3乗以上の項はあまり効いていないことが分かる。すなわち、-2乗の項 $\mu [p_2^2]/2 = \mu [(v-y)^2]/2$ が重要な役割を果たしているのである。このことを下にして、“2つの地域の形と地域間の相対的な隔たりを同時に記述できるような指標を設ける”, ということを考えたい。その試みとして、 \bar{r}' の h からの相対偏差を

$$\gamma = (\bar{r}' - h) / h = \frac{\mu [p_2^2]}{2h^2} = \frac{\mu [(v-y)^2]}{2h^2}$$

と定義してみよう(γ は無名数)。 γ は地域間の距離に逆比例する指標である。

ここで2つの地域が円盤ならば

$$\gamma = (\alpha^2 + \beta^2) / (8h^2)$$

となり、 γ は円盤の大きさに比例する。

また、2つの地域が矩形であれば、(4)より

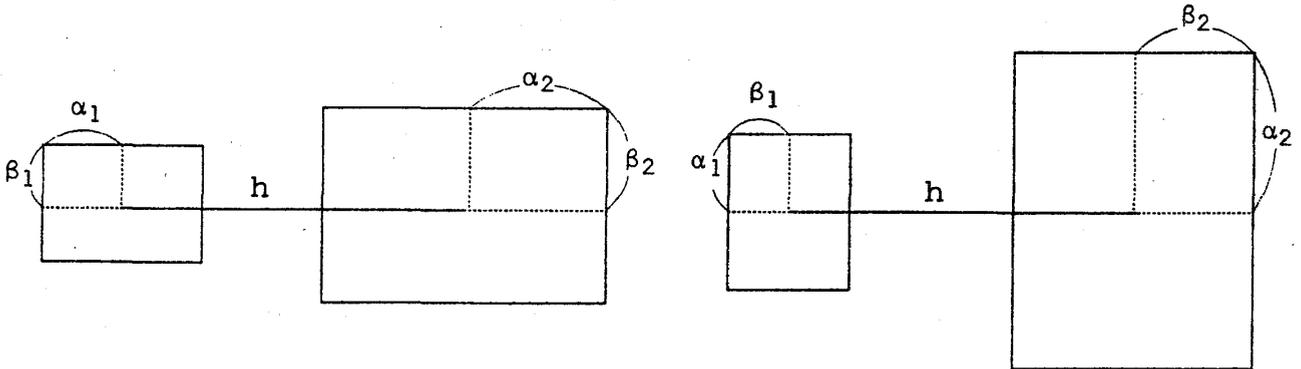
$$\gamma = (\alpha_1^2 \sin^2 \omega + \beta_1^2 \cos^2 \omega + \alpha_2^2 \sin^2 \theta + \beta_2^2 \cos^2 \theta) / (6h^2)$$

となる。ここで、 $\alpha_1 \geq \beta_1$ かつ $\alpha_2 \geq \beta_2$ とすれば、 $\theta, \omega \in [0, \pi/2]$ で γ は θ, ω の

単調増加関数となっており、

$$\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{6h^2} \leq \gamma \leq \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{6h^2}$$

である。このことを図で示すと、図7の通りである。これにより、矩形の長辺が線分 $00'$ と平行に近いほど γ は小さく、垂直に近いほど γ は大きいことが読みとられる。このことは地域が不定形の場合にも一般化可能であろう。すなわち、不定形地域AおよびBの長軸（厳密な言葉ではない。細長い方の軸といった意味）といったものを考えたとき、それを下にしたAとBとの相対的な位置関係が γ の大小である程度読み取られるわけである。



(i) γ は最小: $\gamma = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{6h^2}$

(ii) γ は最大: $\gamma = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{6h^2}$

図7 地域が矩形のときの γ の最小値と最大値 ($\alpha_1 \geq \beta_1$, $\alpha_2 \geq \beta_2$ とする)

また、地域AまたはBを、重心を軸として回転させたとき、 γ が回転角度に敏感でないほど、その地域は等方的である（円盤に近い）といえる。ちなみに地域A、Bが面積 S の円であるときの γ_c は

$$\gamma_c = S / (4\pi h^2) = 0.0796S / h^2$$

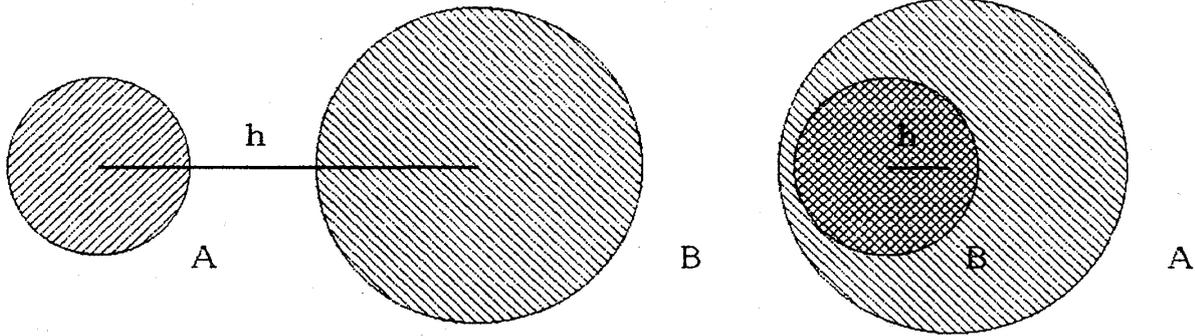
である。一方地域A、Bが面積 S の正方形であるときの γ_R 値は

$$\gamma_R = S / (12h^2) = 0.0833S / h^2 \quad (\text{正方形のとき } \theta, \omega \text{ によらない})$$

であり、両者は大変似通っている。つまり正方形はかなり円盤に近いのである。

4. 円周から円周への平均距離とその応用例

この節では地域A、Bが円盤である場合に限って議論する。まず2つの円盤が互いに交わらないときの平均距離展開式は(3)で導出されている。これと対照的に、円盤Aが円盤Bを完全に含む場合を考えておこう（図8）。



(i)円盤AとBとが交わらない場合

(ii)円盤Aが円盤Bを含む場合

図8 2つの円盤の位置関係

円盤A内に $\overline{PO} = h'$ なる点Pを設け、Pから円盤Aへの平均距離 \bar{r}_{PA} を考えると、 $\zeta = h'/\alpha$ と置くと

$$\bar{r}_{PA} = (4\alpha/9\pi)\{(7+\zeta^2)E(\zeta) - 4(1-\zeta^2)K(\zeta)\}$$

である([腰塚,1977], ただし、K,Eは各々第1種、第2種の完全楕円積分)。

この楕円積分の部分をも $\zeta = h'/\alpha$ で展開し整理すると

$$\bar{r}_{PA} = \alpha [2/3 + \zeta^2/2 - \zeta^4/32 + \dots]$$

となる(係数の一般形は割愛)。したがって、点PがB内で一様な場合の平均距離 \bar{r} は

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \int_B \bar{r}_{PA} \, dudv \\ &= \alpha [2/3 + (\beta/\alpha)^2/4 + (h/\alpha)^2/2 \\ &\quad - (\beta/\alpha)^4/96 - 3(\beta/\alpha)^2(h/\alpha)^2/64 - (h/\alpha)^4/32 + \dots] \quad (9) \end{aligned}$$

と、 β/α および h/α の級数の形で導出される。

さて、(3)および(9)の平均距離を (α, β) の関数であるとし、これらを共通に $\bar{r}_{00} = f(\alpha, \beta)$ とする(2つの添え字は各地域に対応し、0ならば円盤を1ならば円周を意味する)。そして、半径 $\alpha + \Delta\alpha$ の円盤から円盤Bへの平均距離 $f(\alpha + \Delta\alpha, \beta)$ を考える。ここで増分 $\Delta\alpha$ でできたリングから円盤Bへの平均距離に着目し、 $\Delta\alpha \rightarrow 0$ の操作を行なうと、半径 α の円周から円盤Bへの平均距離 \bar{r}_{10} が

$$\bar{r}_{10} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta) \quad (10)$$

と微分方程式で得られる。さらに、(10)の \bar{r}_{10} を (α, β) の関数とみなし、 $\Delta\beta$ の増分を考え同様の操作を行なうと、半径 α の円周から半径 β の円周への平均距離 \bar{r}_{11} が

$$\bar{r}_{11} = \frac{\alpha \beta}{4} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} f(\alpha, \beta) + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta) + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta) \quad (11)$$

と得られる。

こうして、円盤同士が交わらない場合と、一方が他方を含む場合との双方について、円周から円盤へ、および円周から円周への平均距離の展開が可能になった。1例として、円周と円周とが離れている場合 ($\alpha + \beta > h$) を示すと、次式の通りである：

$$\bar{r}_{11} = h[1 + (\alpha/h)^2/4 + (\beta/h)^2/4 + (\alpha/h)^4/64 + (\alpha/h)^2(\beta/h)^2/16 + (\beta/h)^4/64 + \dots] \quad (12)$$

これら円周での結果の応用例は様々に考えられる。例えば、図9のように2つの円盤を考え、各円盤での点の密度がそれぞれ放射対称であるとする。このときの平均距離が、円周での(12)に密度を重み付けして項別積分すれば算出できる。ちなみに図9での分布型が指数型の場合 (i.e.各円盤の中心を原点とする極座標系 (s, θ) で $\rho = (\lambda^2/2\pi)s \cdot \exp(-\lambda s)$)、平均距離を式の形で求めるのは困難で、専ら数値積分を必要とした。これを近似式ではあるが、比較的用意に求めることができるのである (結果は割愛する)。

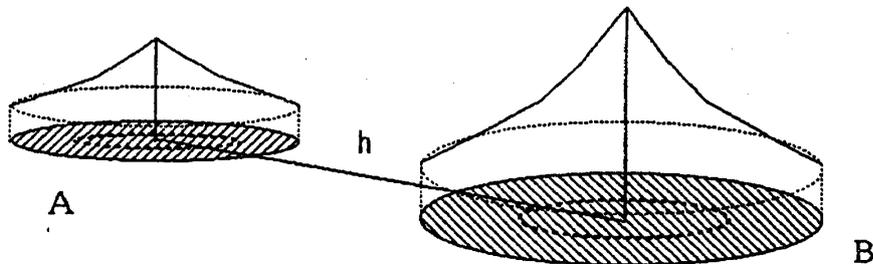


図9 円周～円周の展開式の応用例

5. おわりに

2節ではLegendre展開による平均距離の近似法を紹介し、その精度を実例で示した。このような近似式を最適配置等の分析の簡便法に応用することが課題である。

3節で述べた円周から円周への平均距離展開は円周同士が部分的な交わりを持つケースではまだ導いていない。これを導出すれば応用の対象が広がるので、これも今後の課題である。

なお、本稿で述べた方法によって平均距離近似式が導出されているいくつかのケースと、既存研究で平均距離が導出されているケースとを取り上げ、それらの相互関係を付録の図に示しておく。ただし、同付録で、斜線が付されている領域は円盤や矩形の周および内部を意味し、白抜きの領域は周を意味する。また大きなドットは点を意味する。

参考文献

- [1]Bouwkamp,C.J.(1977): On the Average Distance between Points in Two Coplanar Non-Overlapping Circular Disks. Journal of Applied Science and Engineering, A, Vol.2, pp.183-186.
- [2]Cooper, L.(1961): Location-Allocation Problems. Operations Research, Vol. 11, pp. 331-343.
- [3]Ghosh,B.(1951): Random Distances within a Rectangle and between two Rectangles. Bull Calcutta Math. Sci., Vol.43, pp. 17-24.
- [4]腰塚武志(1977):都市平面の基礎的研究. 東京大学工学部都市工学科博士論文.
- [5]腰塚武志他(1986): 計算幾何学と地理情報処理. 共立出版.
- [6]Love, R.F.(1972): A Computational Procedure for Optimally Locating a Facility with Respect to several Rectangular Regions. Journal of Regional Science, Vol.12, pp.233-242.
- [7]森口繁一(1960): 数学公式集Ⅲ. 岩波書店.
- [8]Schweitzer,P.A.(1968):Moments of Distances of Uniformly Distributed Points. American Mathematical Monthly, Vol.75, pp.802-804.
- [9]Vaughan, R.(1984): Approximate Formulas for Average Distances Associated with Zones. Transportation Science, Vol.18, pp.231-244.

討論 (DISCUSSION)

地域間距離と地域の形

栗田 治、腰塚 武志 (筑波大・社工)

- C. 物理では、距離についての分布関数が問題になり X 線の散乱実験などで観測されるので、いろいろな形について計算が行われています。

富田 博之 (京大・教養・物理)

- C. 遠方からは一点に見えるものが、近づくと大きさ、形、向きという属性が現れる。それを距離の逆数で展開する見方で考えることは、物理のことばでは丁度、多重極展開に対応すると思います。 小川 泰 (筑波大・物理工)