球面の２進分割など

（出原氏の発表に対する　コメント）

清水　達雄（清水建設技研）

集合と余集合を，「まる」の内・外で示す図解法は，オイラーあるいはヴェンの名で，よく知られている。

集合二つでは，その「まる」の切りあいでの４領域で内・外の条件の組合わせが示される。三つでは８領域，ここまでは「まる」は幾何学的の円周でよいのだが，４集合以上では，いびつな形がいりようになる。へこみもあってよいが，領域の分割なのだから，閉じた曲線で，自分自身と交わることのないもの。

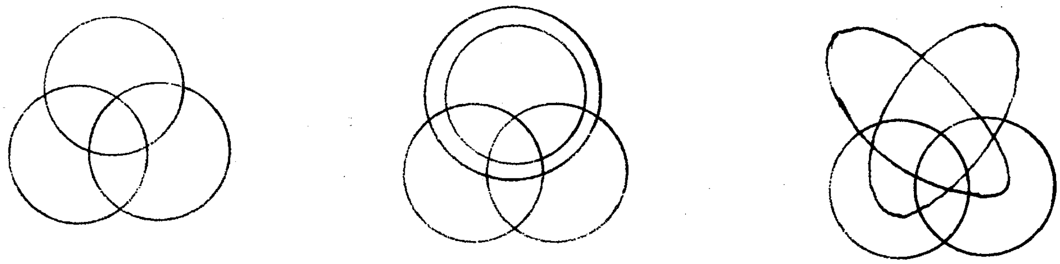
なお連続性を要請すれば，ジョルダン閉曲線となって，それぞれ単独では平面を内・外に分割する。

このそれぞれの内・外という条件の組合わせとして，曲線ｎ個で，ちょうどで2^nの領域に，平面を分割するようにしたい。そのような曲線の描き方，つねに描けることの証明を考える。

問題は出原榮一氏の発表「図表現と図的特性」への質疑から自然に起こったのだが，事柄は簡単でも，証明はそれほど簡単ではない。

昼食をとりにの道すがらの「証明」の間違いは，昼食中に解った。それから考えての証明を，出原氏にお渡ししたのだが，これが実は不完全だった。小さな見落しはすぐ訂正したのだが，なお大事な論点は見逃していた。本稿は，三度目の正直のつもり。

ｎ＝３までは問題ない。３から４へ進めるのだが，一つの輪を二重丸にかえる。その周は４部に切られている。その各部分の平行線を交差するように替える。４が偶数だから、この変更で一つの輪になってしまうことはなく，４回交差する二つの輪になる。これらと，もとからの輪二つとの四つで解になる。



この考え方で，一般のnに対する解が作れるわけだが，注意としてまず，交点はすべて十字点で＊点など多重交差は避ける。そうしておけば、輪のふくらましが位置関係を破らない。

ところで大切な区別が，n＝4から5へ進めるときに出てくる。2重丸にかえる輪はどれでもよいわけではない。輪の上の交点数を数えると

8ヶのが二つ，6ヶのが二つある。6ヶのを2重丸にかえるのでは，目的が達せられない。8ヶのを2重丸にかえ，8回交差に変える。一般に，交点数が 2^{n-1} の輪を選んで，2重丸にかえ，2^{n-1} 回交差させる。これで交点数が 2^n の輪が一対えられる。そこで帰納法がつぎに進められる。

研究会の折には，この大切な条件を見逃していた。

ジョルダン閉曲線n箇を適当に描き，そのそれぞれの内・外という条件の組合わせとして，ちょうど 2^n 箇の領域に平面をわけ，かつ交点数 2^{n-1} 箇の曲線があるようにすること。

この形にすると，証明法が見えてくる。

交点数はつねに偶数だが，最大限度 2^{n-1} ということは，ちょうど 2^n 箇に，内・外という条件の組合わせとしてわけている，ということから出てくる。この最大交点数の曲線を，候補線と呼ぶことにする。

n＝3のときは例外的で，三つとも候補線なのだが，本稿の方法で進める限り，n＝4では候補線はつねに二つある。もっとくわしく，交点数の分布，在りようがきめられる。

交点線

2^{n-1} 箇の、候補線が２箇

$3 \cdot 2^{n-3}$, $4 \cdot 2^{n-4}$, …, $(n-2) \cdot 2^2$ のが１箇ずつ $(n-1) \cdot 2$ のが２箇

合計して，曲線ｎ箇，また点数のほうは，のべ箇数で

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot 2^{n-1} \\
&\quad +3\,(2^{n-3}+2^{n-4}+\cdots+2^2+2 \cdot 2) \\
&\quad +(2^{n-4}+\cdots+2 \cdot 2) \\
&\quad +\cdots+2 \cdot 2 \\
&\quad =2^n+3 \cdot 2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^2 \\
&\quad =2^{n+1}-4
\end{aligned}
$$

これは，のべ箇数で，どの交点も２重に数えられているから，実数としては，半分の

$$2^n-2$$

交点間の線部分のほうは，のべ点数とおなじで，$2^{n+1}-4$

面部分の数は，2^n．そこで

面－線＋点

$=2^{n}-(2^{n+1}-4)+(2^{n}-2)$，$=2$

すなわち，オイラーの定理にいう通り。その2^{n}箇の面部分のうち，

3辺形　2^{n-1}箇

4辺形　2^{n-2}箇

（n－1）辺形　2^{3}箇

n辺形　2^{3}箇

のべ辺数$2^{n+2}-2^{3}=(2^{n+1}-4)\times 2$，線実数の倍。

こうした関係が，帰納法の手順から確かめられる。

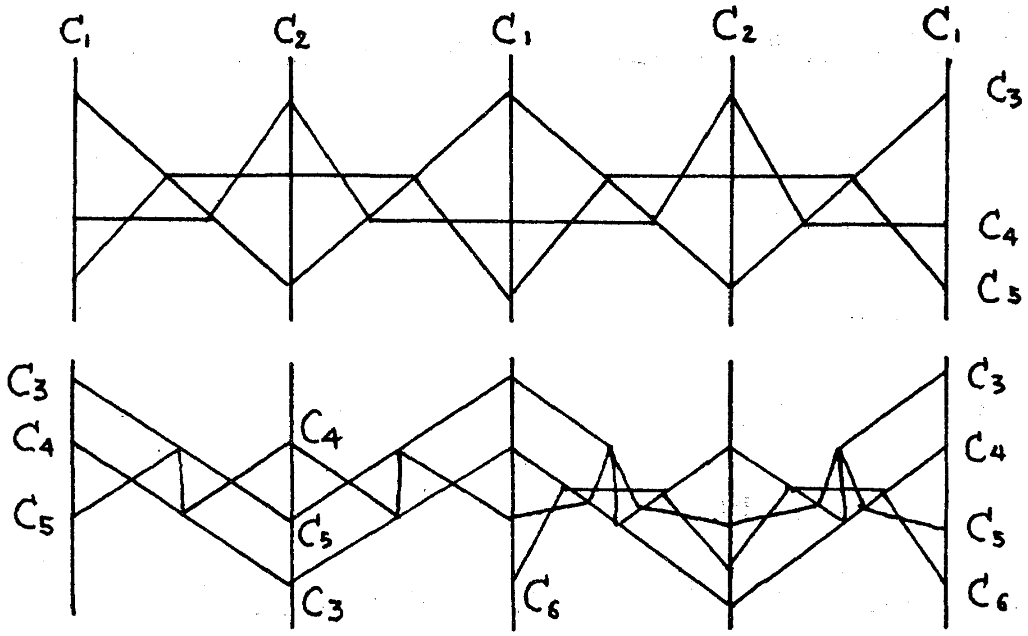
さて，その2^{n}部分への分割の実際の姿だか，対称性が見易いよう，球面の分割として考える。n＝1，2，3までは，大円を直交させればよい。4以上では3辺形，2^{n-1}箇のつらなる帯を，赤道部分におく。これは候補線の一つを2重化し交差させるところで，生ずるもの。4辺形以上は，その両側，辺数最大のが両極に集まる。

そこまでは，よいのだが，n＝6

では，意外にも，南北極の交換による 対称性が破れる。候補のどちらを倍化するかによって，極の向きがきまる。細胞分裂でいう，極性の発現！

そのさき，n＝7では，候補線の選び方で，組合わせ的にことなった2型が，現れる。考えてみれば，一意性の保証は，もともとない。

普通の世界地図の描き方で，n＝5のときの分割，および5から6への移行を示しておこう。



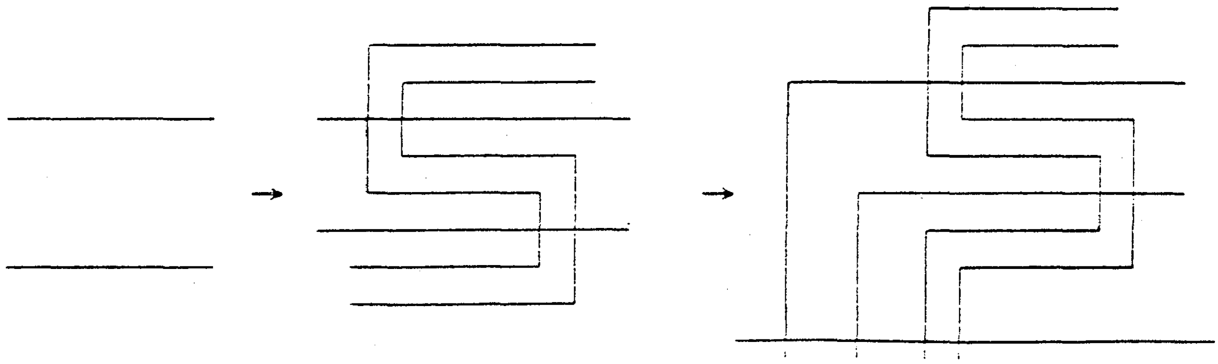
さて，集合の内・外，あるいは真理値０，１というのを，多値にしたら，というお話もあった。

同心円で，多領域への分割を示すとして，その二組を交わらせると，３値の場合に10領域で一つ重複する。同心円の代わりに平行線を使って，この重複を避ける。

一般には，曲線までひろげた平行な線をレールと呼ぶことにする。本数mによってモノレール，並レール，３条レール，　　　　そのmレールの２組で，$(m+1)^2$ 領域への分割ができる。

もっと一般に，mレールn組で，それぞれの組による分割の組合せとしての，$(m+1)^n$ 領域への分割ができる。

これは，いわゆるブストロフェドン（牛耕），往復書きの要領でやればよい。たとえば２レールによる３領域をせまい２レールで，S字にたどる。それの繰返し。



モノレールの場合の，数式表示として，たとえば

C_n：（X_n（t），y_n（t）），$-1 \leqq t \leqq 1$

ここでまず

X_1（t）	y_1（t）	
$=t^*$，	$=-1$，	$-1 \leqq t \leqq -1/2$
$=0$，	$=2t$，	$-1/2 \leqq t \leqq 1/2$
$=t^*$，	$=1$，	$+1/2 \leqq t \leqq 1$

ただし，ここで

$$t^* \begin{cases} =2t+1, & t \leqq 0 \\ =2t-1, & 0 < t \end{cases}$$

それから

$$X_{n+1}(t) \begin{cases} =(X_n(t^*)-1)/2, & t \leqq 0 \\ =(X_n(t^*)+1)/2, & 0 < t \end{cases}$$

λを$0<\lambda<1$のような定数として，$n>1$では

$$y_{n+1}(t)=\lambda \quad y_m(t^*)$$

$n=1$のときだけ

$$y_2(t) = \begin{cases} \lambda y_1(t^*), & t \leq 0 \\ -\lambda y_1(t^*), & 0<t \end{cases}$$