ダブル充塡図形

中村義作　信州大学

市販のテトラ牛乳の空箱を広げると，細長い長方形となる。この形なら，テープ状の包装紙を無駄なく使って，いくらでもテトラ牛乳の容器が作れる。一方，この容器を何個も積み重ねたとき，隙間ができないように積み込めば，角の尖った部分も傷まず，運搬も容易である。市販のテトラ牛乳の容器は，これらの点で実によく作られている。

紙などで作られた容器が，材料の面で効率的であるということは，その展開図が平面を充塡することである。また，運搬の面で効率的であるということは，その容器が空間を充塡することである。この二面的な充塡をダブル充塡と呼び，それが可能な立体図形をダブル充塡図形と呼ぶ。

ダブル充塡図形の１つの分類法は，展開図による方法である。このとき，展開図を凸図形に限定すれば，まことに明快である。平面を充塡できる凸図形は三角形，四角形，五角形，六角形に限られ，七角形以上は不可能なことが分かっているからである。以下では，ダブル充塡図形の存在を具体的に示すため，展開図を凸図形に限定する。

さて，空間を充塡する立体を考えるとき，三角柱を基本にすると便利である。任意の三角形は平面を充塡するので，任意の三角柱は必ず空間を充塡する。このため，三角柱に積み上げられる立体は，つねに空間を充塡する。このとき，三角柱への積み上げを螺旋状にするのが常識的のため，三角柱は必然的に正三角柱になる。面白いことに，ダブル充塡図形をこの場合に限定しても，展開図を三角形，四角形，五角形，六角形のどれにでもできる。これらの例を順次に示す。

まず，図１の三角形は，ダブル充塡図形の展開図である。これを点線に添って折り曲げると，少しゆがんだ四面体ができる。これを積み重ねると三角柱となり，軸と直角に切った断面は正三角形である。

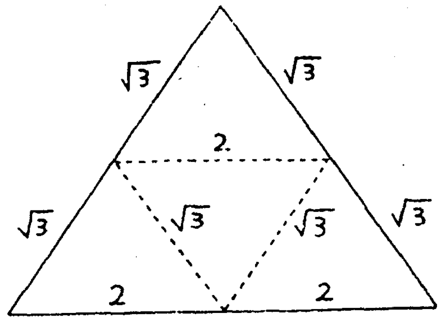


図　1

つぎに，図２の平行四辺形は，図１を少し修正したもので

ある。これは，同じ四面体にたいする別の展開図で，もちろんダブル充塡図形である。これに気がつくと，同じ立体でも，いろいろの展開図でダブル充塡できることが分かる。図３はその１例で、展開図は長方形である。四角形は、任意の形のもので平面を充塡できるため，展開図が四角形になりさえすればよいわけである。こうして，図４も同じ立体からの展開図となり，空間を充塡する１つの四面体が見つかれば，四角形の展開図はいくらでも作れることがわかる。

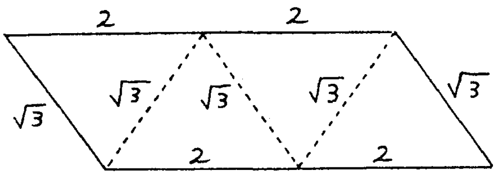


図　2

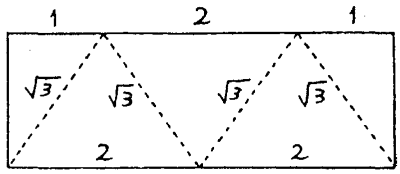


図　3

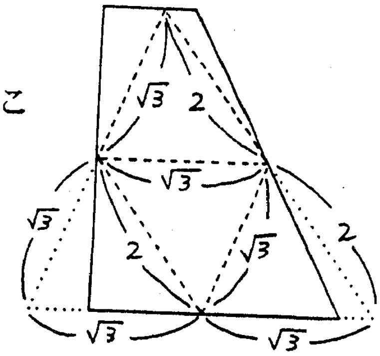


図　4

展開図が五角形となるダブル充塡図形としては，図５がある。この中のａは約3.937366で，図中のＬＡとＬＡ’が等しくなるという条件から決められる。この条件は，三角関数を含んだ超越方程式になるので，ａを既知の関数で表現するのは大変である。この五角形　を図６のように組み合わせると，２個で奇妙な形の六角形ができる。この六角形の３組の対辺は，それぞれ平行で，長さも等しい。筆者は，これを（仮に）平行六角形と読んでいるが，平行六角形はつねに平面を充塡する。図５の∠Ａと∠Ａ’を等しくしたのは，２個で平行六角形を作るためである。

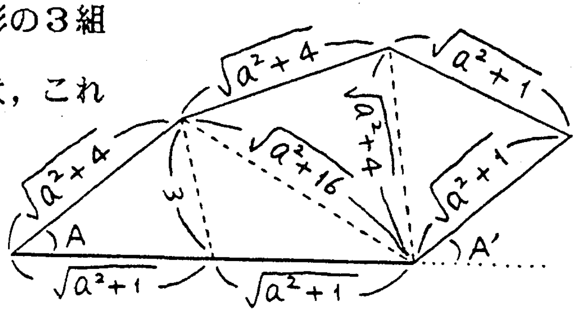


図　5

展開図が六角形となるダブル充塡図形としては，図７である。展開図はかなりスマートであるが，これから作った立体（四面体）は相当にいびつである。実際に作ると，よく分かる。

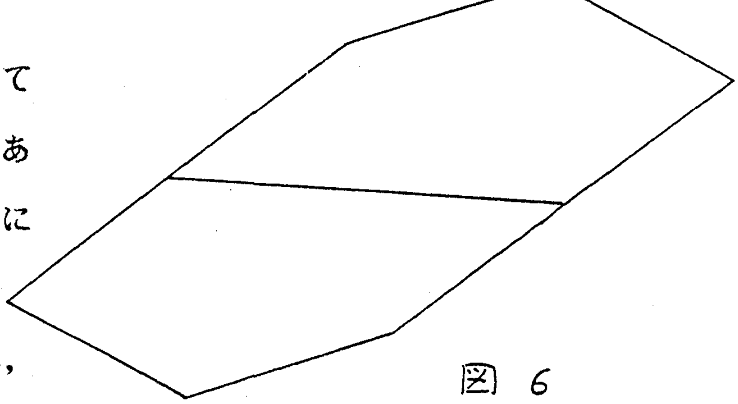


図　6

以上で，展開図が三角形，四角形，五角形，

六角形になるダブル充塡図形を具体的に示したが，これらはあくまでも例である。これ以外にも，沢山のダブル充塡図形があると思うが，筆者はまだ調べていない。ただし，筆者のおよその感じでは，展開図が三角形と五角形になるダブル充塡図形の発見は，なかなか大変のようである。興味ある方は調べてみるとよい。また，

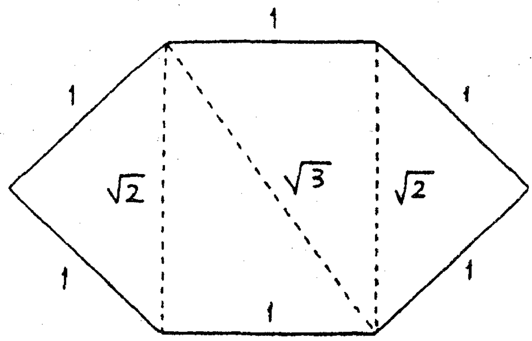


図 7

展開図に凹図形を許したとき，ダブル充塡図形の種類はケタ違いに増える。立方体を例にとると平面を充塡する展開図はいろいろに作れる。さらに，次元を四次元に上げると，立体と平面の展開図が得られるため，トリプル充塡図形も考えられる。いろいろの方面に展開できる研究と思っている。

（付記）：ここに紹介した研究は，『数理パズル』，中公新書，に発表した内容を，少しばかり数学的に記述したものである。『数理パズル』では，結果の展開図だけを紹介し，背後にある正三角柱のことはまったく述べなかった。もっとも，数学のできる人なら追跡できる。ただし，図5のような寸法を数学的に導こうとすると，やはり大変である。筆者の筆不精のために，数式的誘導をすべて省略したことをお詫びする。

討論（DISCUSSION）

ダブル充塡図形　　　　　　　　　　　　　　　　　中村　義作（信州大・工）

Q．１：３角柱式に２次元＋１次元という考えの議論でしたが，３次元的に等方的な充塡である。体心立方格子（ｂｂｃ）は６種の長さが（$2\sqrt{3}\ \sqrt{3}\ \sqrt{3}\ \sqrt{3}\ 2$）の４面体唯一種類の充塡とみられます。関係は？

２：同一球による３次元最密充塡がｆｃｃ（面心立方）やｈｅｐｌ（六方稠密）だと言う証明はないと思います。２次元最密充塡である三角格子の積層として納得しているのが現状でしょう。

４球で作った最密の正４面体を面共有で連ね，スパイラル状に太さのある１次元的にまず最密充塡させ，さのような棒による２次元充塡を考えるととの位の充塡率になるのか以前に考えてみましたが，途中で沈没しました。どなたか結果を御存知の方は？

小川　泰（筑波大・物理工）

A．１：展開図が三角形となるのは，まさにその寸法です。

２：小生もそのことについてはまだ調べておりません。小生も教えてもらいたいところです。

Q．２：どうゆう種類の数値計算で答えを出されたか。細谷　治夫（お茶大・理・化学）

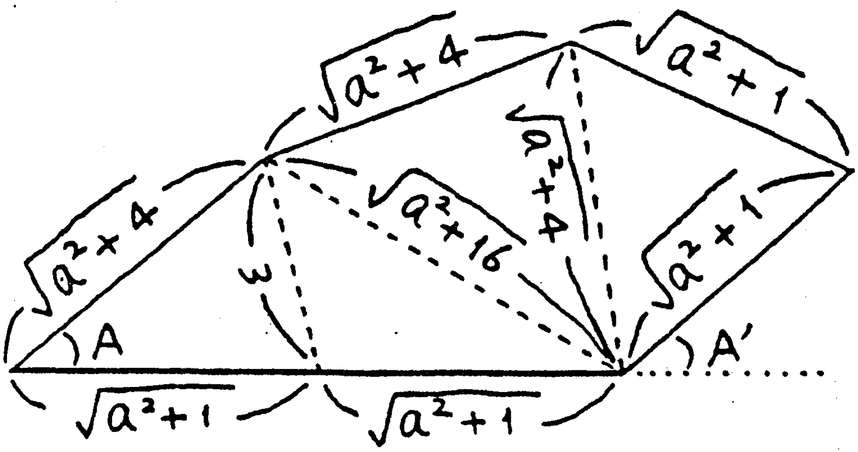
A．下の図で，∠Ａを計算すると

$$\angle A = \cos^{-1}\frac{a^2-4}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+4)}}$$

となり，∠Ａ’を計算すると

$$\angle A' = 2\pi - \left(\cos^{-1} \frac{a^2+8}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+16)}} + \cos^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+16}{a^2+4}} + \cos^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+4}{a^2+1}} \right)$$

となる。これから∠A＝∠A’とすれば，三角関数を含んだ超越方程式が得られる。ａの値は，これを数値計算で求めたものである。なお，下の図の中の各辺の長さは，正三角柱を螺旋階段状に切り分けることによって，解析的に求めたものである。



Ｃ．名取通弘氏（宇宙研）の研究で，四面体を縦につなげて出来た三角柱の稜の部分をフレームに残したトラスを考えると，無限につながるトラスが出来ます。これは宇宙構造物として一つの基本的な形として研究されています。　　　三浦　公亮（宇宙研）