正多胞体による４次元空間充塡図形

宮崎興二（神戸大学）

１．目的

自然界や人工界の造形の中には、規則的な形状のユニットによる２次元平面や３次元空間の幾何学的な充塡図形を基礎として広がっているものがある。

この充塡図形は周期的パターン（部分の平行移動によって導かれるもの）と非周期的パターン（部分の平行移動によっては導かれないもの）に大別されることがあって、最近ではどちらかというと、後者の持つ目新しく自由で有機的な雰囲気のほうに研究家の関心が集まっている。

ところがこの非周期的パターンの多くは、２次元平面上や３次元空間内でこそ目新しくても、じつは、４次元以上の高次元空間では、ごくふつうの高次元立方体による周期的パターンの射影、あるいは断面、ないしはそれらの規則的な変形、の現れとして理解できることがわかっている。

いいかえると、最近注目を集めている非周期的パターンを研究するということは、とりも直さず、４次元以上の高次元立方体を初めとする規則的な図形による充塡図形のうちの周期的パターンを調べる、ということを意味する。

したがって本稿では、正多角形による周期的な２次元平面充塡図形ならびに正多面体による周期的な３次元空間充塡図形に相当する、正多胞体による周期的な４次元空間充塡図形、ならびにその高次元空間への拡張図形、について基礎的に考察して今後の周期的あるいは非周期的パターン研究のための新しい視野を開いてみる。

２．４次元正多胞体

２次元平面上の正多辺形（正多角形の境界図形）ならびに３次元空間内の正多面体に相当する４次元空間内における図形が４次元正多胞体（以下ではたんに正多胞体という）である。

正多胞体とは、合同な正多面体状の３次元空間の粒（以下では正多面体状胞、あるいはたんに胞、と呼ぶ）が各稜まわりに同じ数ずつ同じ状態で集まっている図形であって、図１の６種類がある。

Ａは、すべてで５個の正４面体状胞のうち３個ずつが各稜まわりに集まる正５胞体（正多面体のうちの正４面体に相当）、Ｂは、すべてで８個の立方体状胞のうち３個ずつが各稜まわりに集まる４次元立方体（正８胞体。正多面体のうちの立方体に相当）、Ｃは、すべてで１６個の正４面体状胞のうち４個ずつが各稜まわりに集まる正１６胞体（正多面体のうちの正８面体に相当）、Ｄは、すべてで２４個の正８面体状胞のうち３個ずつが各稜まわりに集まる正２４胞体（相当する正多面体はない。強いていえば立方体と正８面体の中間図形としての立方８面体、あるいはその双対図形としての菱形１２面体、に相当）、Ｅは、すべてで１２０個の正１２面体状胞のうち３個ずつが各稜まわりに集まる正１２０胞体（正多面体のうちの正１２面体に相当）、Ｆは、すべてで６００個の正４面体状胞のうち５個ずつが各稜まわりに集まる正６００胞体（正多面体のうちの正２０面体に相当）、である。

いずれも、それぞれを頂点、稜、側面、胞のいずれかを中心とするように３次元空間内へ射影（直射影）したとき得られる点心模型（①）、線心模型（②）、面心模型（③）、胞心模型（④）の各立体模型の図（ＡからＤまでは見取図、ＥとＦは平面図と立面図）で表現されている。

それぞれは右下に付記したような有限回転群の対称性を持つ。D_nは正ｎ角柱と同じ２面体群、Ｔは正４面体と同じ正４面体群、Ｏは正８面体あるいは立方体と同じ正８面体群、Ｉは正２０面体あるいは正１２面体と同じ正２０面体群に属する対称性を意味する。

それぞれの模型の側面の実形のほとんどは３次元空間内で回転する正多面体の規則的な平面図と立面図に現れる多角形に一致するという特徴を持つが、とくに

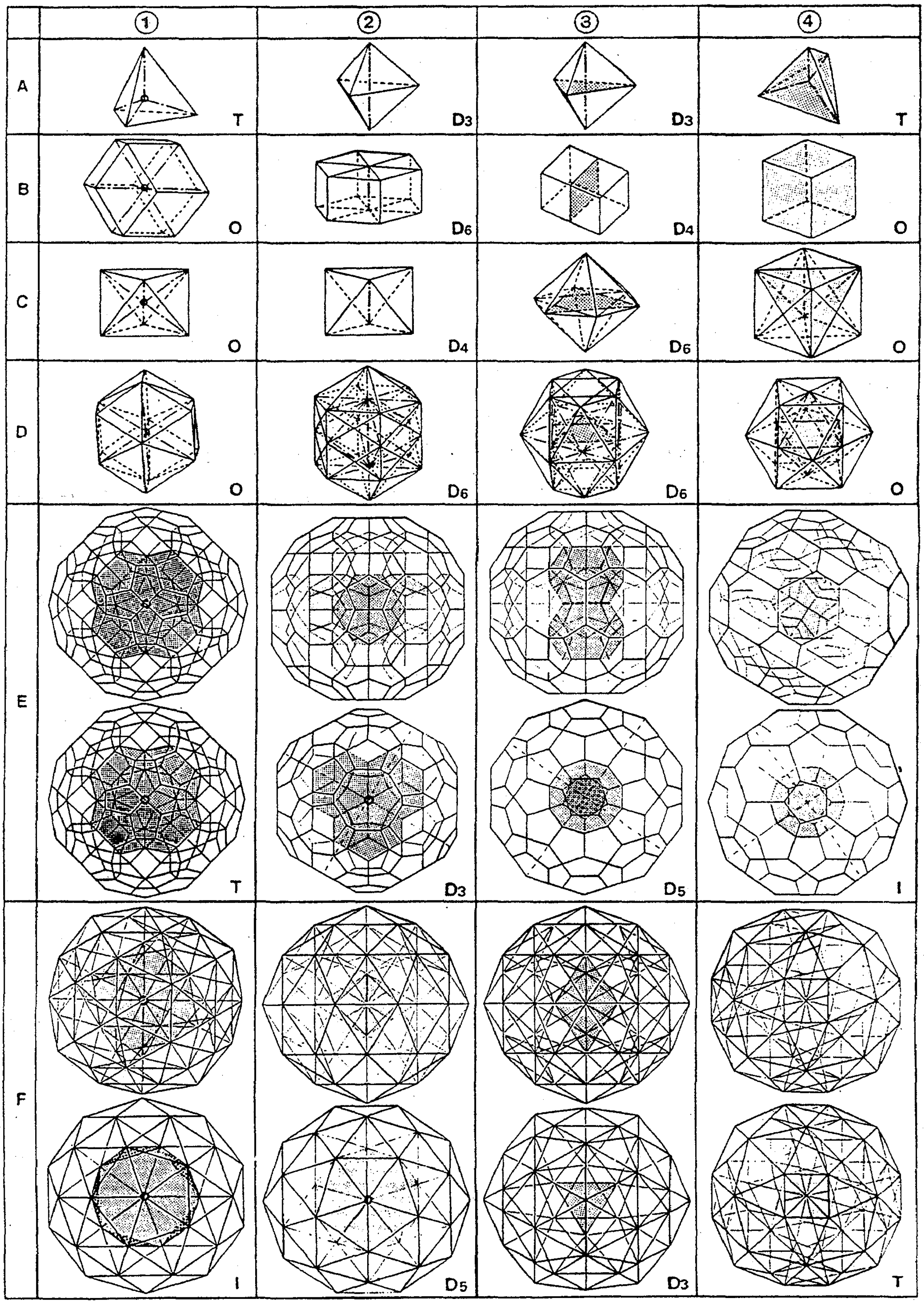


図１　正多胞体の３次元空間への射影としての模型。Ａは正５胞体、Ｂは４次元立方体、Ｃは正１６胞体、Ｄは正２４胞体（以上の４種類については模型の見取図で示す）、Ｅは正１２０胞体、Ｆは正６００胞体（以上の２種類については模型の平面図と立面図で示す）。①は点心模型、②は線心模型、③は面心模型、④は胞心模型。

本稿で主対象とするＢ（４次元立方体）、Ｃ（正１６胞体）、Ｄ（正２４胞体）の各模型についてはつぎのような外形をもつ。

Ｂの①は菱形１２面体（対角線の長さが１：$\sqrt{2}$の菱形１２枚からなる）、②は正６角柱（正方形６枚と正６角形２枚からなる）、③は直方体（正方形２枚と$\sqrt{2}$矩形４枚からなる）、④は立方体、である。Ｃの①は正８面体、②は３角８面体（底辺と高さの比が$\sqrt{2}$：１の２等辺３角形８枚からなる）、③は重６角錘（底辺と高さの比が２：３の２等辺３角形１２枚からなる）、④は立方体、である。Ｄの①は菱形１２面体、②は１個の６角柱（$\sqrt{2}$矩形６枚と正６角形２枚からなる）と２個の６角錘（底辺と高さの比が２$\sqrt{2}$：３の３角形６枚と正６角形１枚からなる）の合体、③は重角錘台（底辺と高さの比が２：３の２等辺３角形１２枚と同じく２$\sqrt{3}$：$\sqrt{7}$の２等辺３角形１２枚、正６角形２枚からなる）、④は立方８面体、である。

３．合同な４次元正多胞体による４次元空間充填図形

合同な正多胞体を、胞（多角形状に面縮しているものもある）を共有させて連結したとき４次元空間を充填するものは、周知のように、図１のうちの４次元立方体（Ｂ）、正１６胞体（Ｃ）、正２４胞体（Ｄ）の３種類である。その場合の充填図形の３次元空間内への射影を図１の配列に従って図２に示す（４次元的に隠れた胞は表現されていない）。

４．ｎ（≧５）次元正多胞体

２次元正多辺形が無数、３次元正多面体が５種類、４次元正多胞体が６種類、それぞれあるのに対して、ｎ（≧５）次元正多胞体には図３の３種類がある。

左端は、ｎ次元正４面体で、すべてでｎ＋１個の（ｎ－１）次元正４面体状の（ｎ－１）次元空間が集積している。これを２次元平面上の図で表現するには正

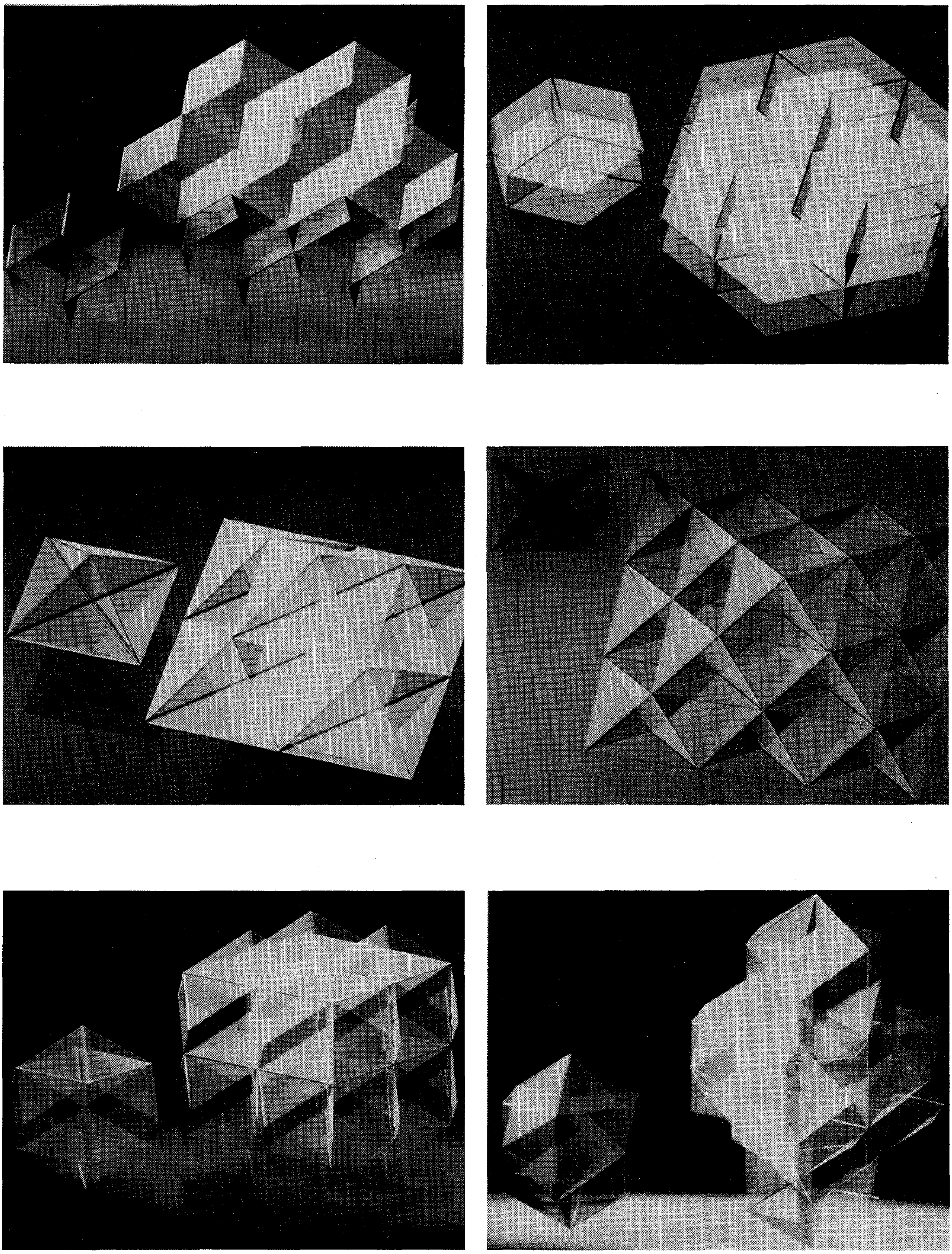
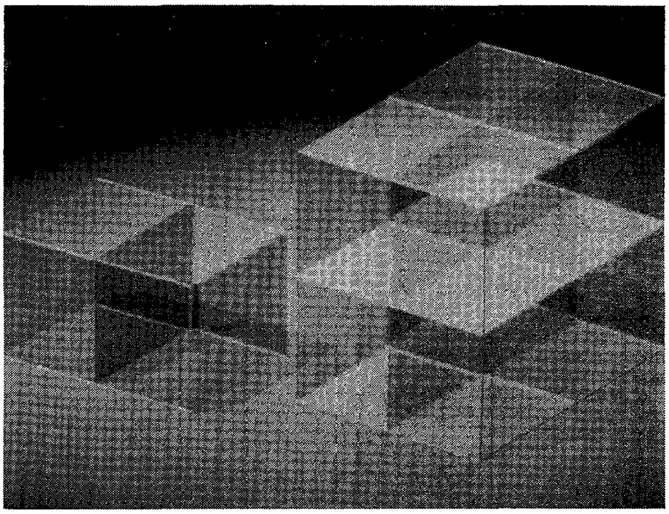
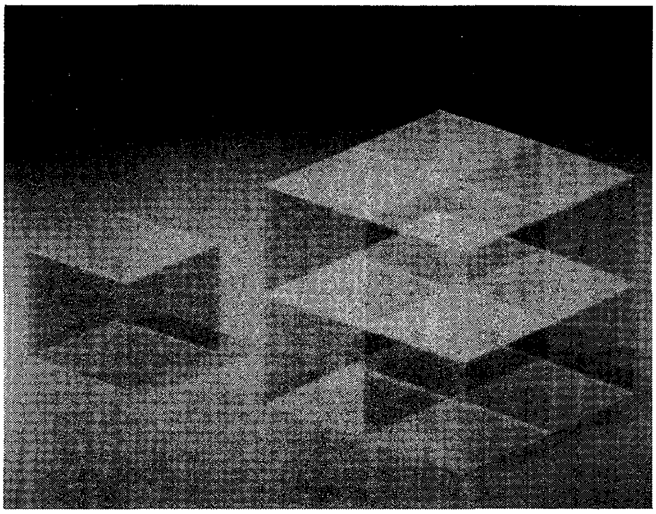
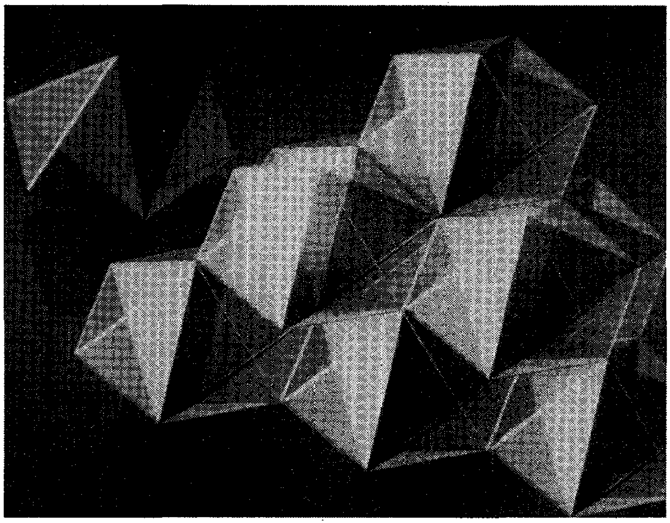
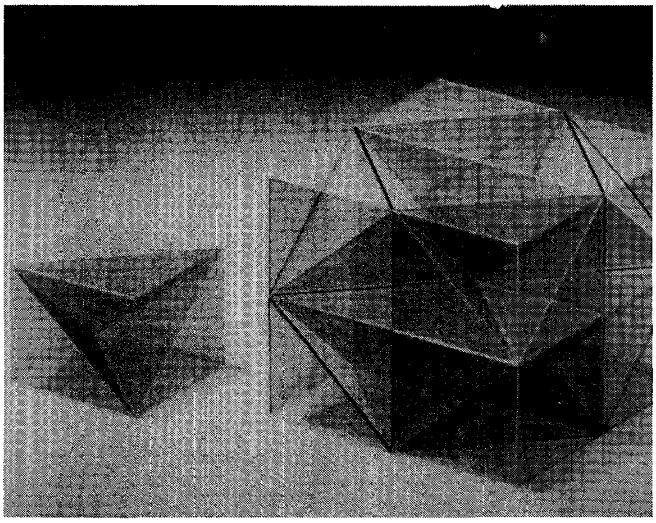
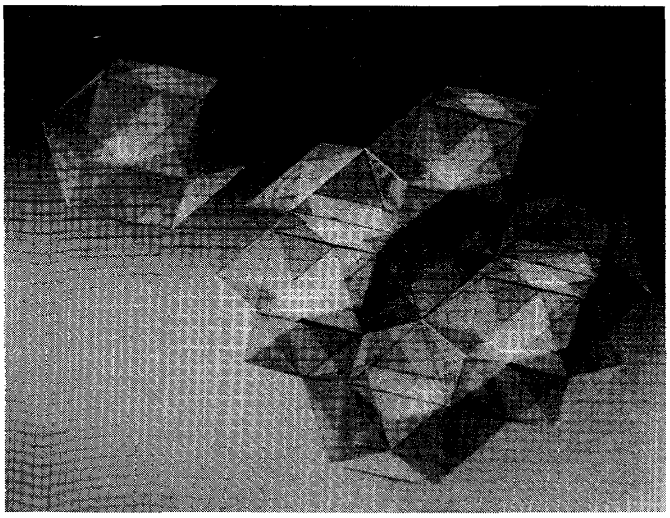
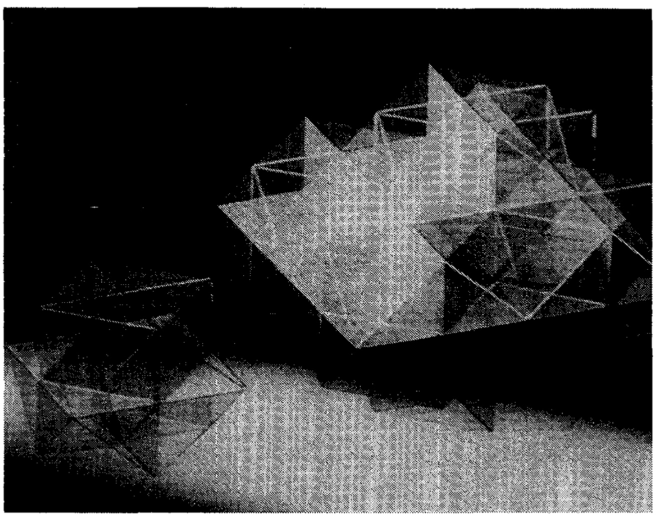


図２　合同な４次元正多胞体による４次元空間充塡図形。配列は図１と同じ。ＣＧ：今西雅文。

ｎ＋１角形の中にすべての対角線を加えればよい。

中央は、ｎ次元立方体で、２ｎ個の（ｎ－１）次元立方体状の（ｎ－１）次元空間が集積している。これを１次元ずつ低い次元の空間へ直射影していくと、最終的には、正２ｎ角形の中に各辺に平行で等長な辺からなる菱形をすべて加えた図となる。この図は考え方によってはｎ次元立方体の２次元平面による断面と見ることもできる。

右端は、ｎ次元正８面体で、2^n個の（ｎ－１）次元正４面体状の（ｎ－１）次元空間が集積している。これを上記ｎ次元立方体の双対図形として２次元平面上の図で表現するには正2^n角形の中に中心を通るもの以外のすべての対角線を加えればよい。

５．合同なｎ（≧５）次元正多胞体によるｎ次元空間充塡図形

合同なｎ（≧５）次元正多胞体を（ｎ－１）次元胞を共有させて連結させたときｎ次元空間を充塡するものは、ｎ次元立方体のみである。

その場合の２次元平面上への上述の意味での繰り返された直射影（２次元平面による断面とも考えられる）のいくつかの例を図４にあげる。右下に次元数を付記する（石原慶一氏考案）。いずれの場合でもユニットの形状を調節することにより、配列を、周期的にも非周期的にも組替えることができ、そのうちのｎ＝６の場合の変化の一つが有名なペンローズ・パターンとなる。

フェドロフが数え上げたことで知られる平行多面体（合同なユニットの平行移動のみで側面を共有し合いながら３次元空間を充塡する多面体。立方体、正６角柱、菱形１２面体、長菱形１２面体、切頭８面体）は、３次元空間への上述のような意味での繰り返された直射影（３次元空間による断面とも考えられる）としての模型の外形である。

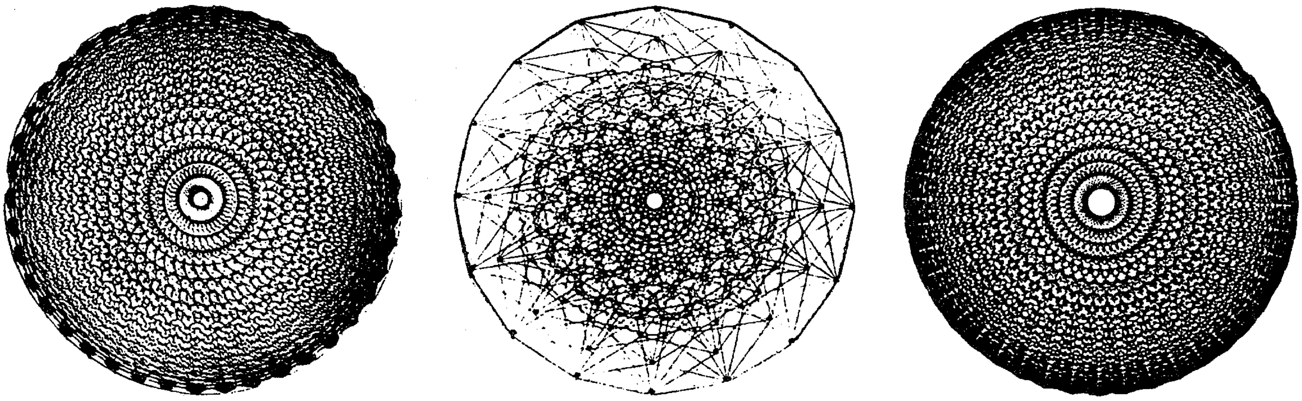


図３　ｎ次元正多胞体。左端はｎ次元正４面体、中央はｎ次元立方体、右端はｎ次元正８面体。ＣＧ：高田一郎。

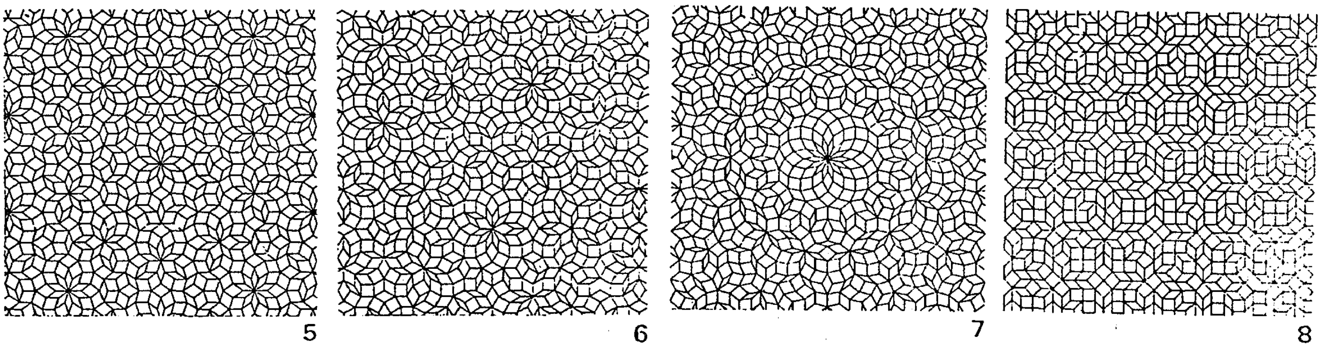


図４　ｎ（≧５）次元立方体によるｎ次元空間充塡図形の、射影（繰り返された直射影）、あるいは２次元平面による断面。ＣＧ：石原慶一。

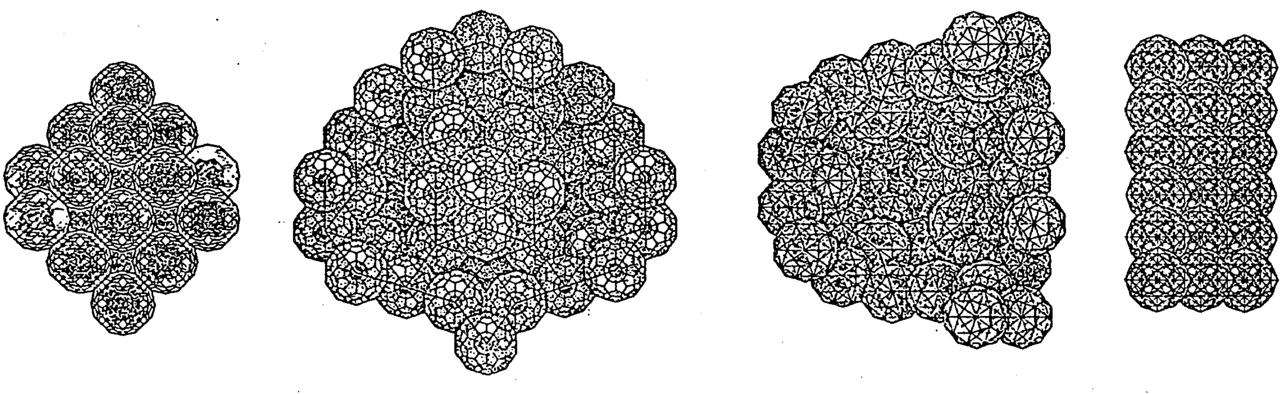


図５　合同な正１２０胞体（左２種類）と正６００胞体（右２種類）による４次元空間内での周期的あるいは非周期的連結図形

６．関連図形

以上のような高次元空間充塡図形（図２、４）に関連する図形にはつぎのようなものがある。

まず、図１のうち図２に関係しないＡ（正５胞体）、Ｅ（正１２０胞体）、Ｆ（正６００胞体）の３種類を、胞の共有によって連結させてみる。

正５胞体の場合は、３次元空間における正４面体の場合と同じく、閉じることのない無限に発散するさまざまな造形がつぎつぎ得られると考えられる。ただしそれを３次元空間へ射影した場合、付加されていく正５胞体の姿はきわめて一般的なものとなり、図２のような整った模型としての表現は困難となる。

それに対して正１２０胞体と正６００胞体の場合は、４次元空間を充塡するのではないが、胞および側面を共有し合って図５のように連結する。この連結図形は、３次元空間へ射影された場合、その３次元空間を周期的あるいは非周期的に被覆（ユニット同士が側面のみならず３次元空間の部分をも共有し合って３次元空間を部分的には二重に間隙なく覆い尽くす）している。ただし、周期的パターンは、正１２０胞体の点心模型と線心模型、ならびに正６００胞体の面心模型と胞心模型、にそれぞれ現れ、それに対して、非周期的パターンは、正１２０胞体の面心模型と胞心模型、ならびに正６００胞体の点心模型と線心模型、にそれぞれ現れる。理由は、さきに触れたそれぞれの持つ有限回転群の対称性の種類にある。つまり５方対称性を持つもの（D_5、あるいはＩ）からは非周期的パターンが生まれ、それ以外からは周期的パターンが生まれる。図５には、そのうち正１２０胞体の点心模型（左端。周期的）、面心模型（左から二つ目。非周期的）、および正６００胞体の線心模型（右から二つ目。非周期的）、胞心模型（右端。周期的）を示す。

以上はいずれも合同なユニットからなるが、複数種類のユニットを使う場合はさらにさまざまなパターンを導くことができる。

そのうちの代表的なものが、複数種類のｎ次元正多胞体を（ｎ－２）次元境界図形のまわりに同じ数ずつ同じ状態で集めるｎ次元空間充塡図形である。

この図形の延長線上にあるものとして、２次元平面上には、８種類の半正タイル貼り図形（２種類以上の正多角形が各頂点まわりに同じ数ずつ同じ状態で集ま

る２次元平面充塡図形）が、また３次元空間内には、オクテット・ブロック（正４面体と正８面体を交互に配列する３次元空間充塡図形）が、それぞれある。

これらに相当する図形を４次元空間内で捜すと、正５胞体と正１６胞体による充塡図形というものが考えられる。しかし、この図形の成立する可能性はないようである。もし存在するとするなら、図２の正１６胞体の欄（Ｃ）の、たとえば④において、立方体による３次元空間充塡図形の形に射影された正１６胞体群のあいだに、図１のＡ欄で見られるような外形として射影された正５胞体が加えられなければならないが、明かにそのようなことは可能でない。

オクテット・ブロックに相当するｎ次元図形、つまりｎ次元正４面体とｎ次元正８面体によるｎ次元空間充塡図形、が一般的に５次元以上の空間で存在するかどうかは判らないが、この図形は、けっきょく、ｎ次元正多胞体による唯一のｎ次元空間充塡図形としての立方体による空間充塡図形に双対なのであって、その存在を模索することは２次元平面上や３次元空間内における周期的あるいは非周期的パターンの研究上無意味ではない。

７．結論

図１に示す６種類の正多胞体は、図２のように４次元空間を充塡する。この操作をｎ（≧５）次元空間において拡張すれば、ｎ次元立方体によるｎ次元空間充塡図形１種類のみが得られ、それは２次元平面上で、図４のように周期的にも非周期的にも表現することができる。

このようなところからも、４次元以上の高次元空間におけるｎ次元正多胞体によるｎ次元空間充塡図形に関する考察は、自然界や人工界におけるさまざまな造形に関係する研究において基礎的な重要性を持っている、と結論することができる。

討論（ＤＩＳＣＵＳＳＩＯＮ）

Ｃ．Voronoi 分割の観点では空間を各粒子のなわばりに分割しつくして、いわばどの土地の誰かの物、どこかの国の物です。４次元結晶から射影した３次元空間の分割は射影の方法によっては共有域もあり、何か示唆的にも思われます。

小川　泰（筑波大・物理工）