「形と空間」研究会講演、１９８８年1月１８日、於統計数理研究所

「たたみこみの幾何学」

三浦公亮（宇宙科学研究所）

宇宙の構造物を作るうえで、二つの代表的な設計上の制約がある。　その一つは力学的なもので、重力がないということに基づく。もう一つは空間的なもので、地上から宇宙に運ばれる過程で、ロケットやシャトルの貨物室に入るパッケージにしなければならないことである。これからの宇宙の構造物は、ほとんどが大きい、というよりも常識を超える大きいものが多い。例えば、アンテナでは５０から１００メートルくらいの直径のものがいますぐ必要である。宇宙のはるかかなたの星からの微弱な電波をうけるには、それくらいのものでなければならない。また宇宙帆船（ソーラーセイル）では、太陽光圧を受けて推進に用いるためには、勢い巨大な面積が必要となる。月までの帆走で、現在設計が進んでいる比較的小型のものでも、５０００平方メートルの面積となる。しかもそれを展開し、支持する骨組みもパッケージしなければならない。

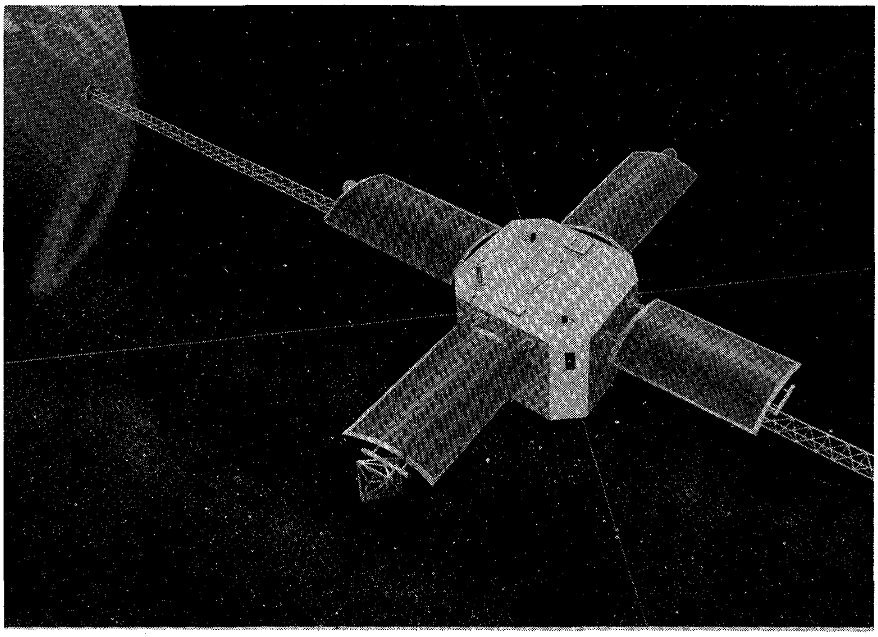
宇宙の構造物に関する以上のような背景のもとで、本日ここで講演するような「たたみこみの幾何学」と呼んでよいような新しい分野が成立したのである。筆者は、１０数年以前からこの研究を開始し、いくつかの新しい形を発見した。そのうちあるものは実際の宇宙ミッションに組み込まれて、宇宙に飛び立つ日も近い。筆者のこの問題にたいする基本的な姿勢は、たたみこみの最も自然な形を求めることであった。その根拠は、たたみこみの方法は実に無数存在しうるが、そのなかで自然の法則にのっとった方法が、最も本質的な性質たとえば最小エネルギ、単純性、を備えているはずという思想にある。このことは結果に於て　正しいことがしめされた。

本日は、そういうたたみこみの幾何学のうち、一次元と二次元のたたみこみについて述べる。一次元については、これを利用した伸展マストのデモンストレーションを、二次元については、地図のミウラ折りを参加者にトライしていただき、この幾何学の理解の補助にしたいと思う。

以下は、当日参考資料として配布した、日本機械学会会誌、１９８７年１１月号、　「展開宇宙構造物の発想」　三浦公亮　の関連部分である

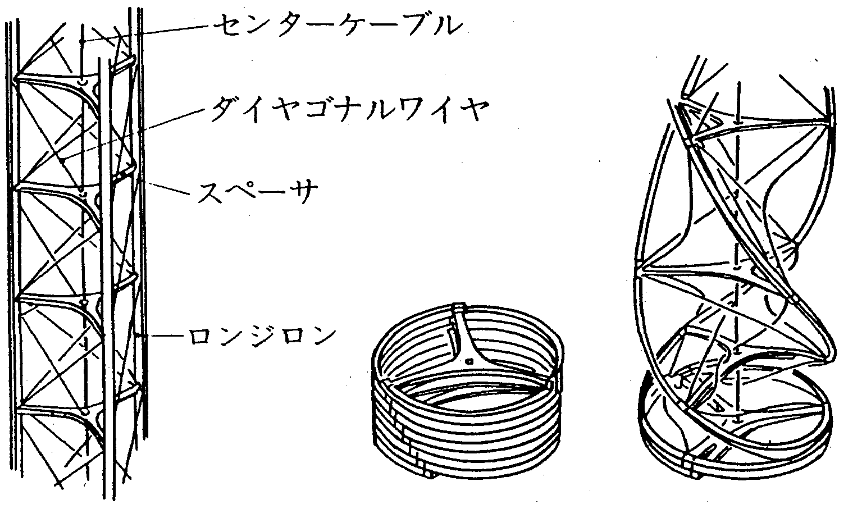
一次元のたたみこみの幾何学（コイラブル・ロンジロン・マスト）

昨年惑星探査機 VOYAGER が天王星を通過し観測をおこなった。 VOYAGER の機体の写真を見たひとは、長いトラス状の腕が本体からつきでていることに気付かれたであろう。 これと似たマストはＥＸＯＳ－Ｄにも搭載されていて（１図）、



1図 オーロラ観測衛星ＥＸＯＳ－Ｄ

コイラブル・ロンジロン・マストと呼ばれる伸展マストである。 その特徴は、三本のロンジロン（縦梁）がコイル状に収納されることである（２図）。 非常



2図 コイラブル・ロンジロン・マスト

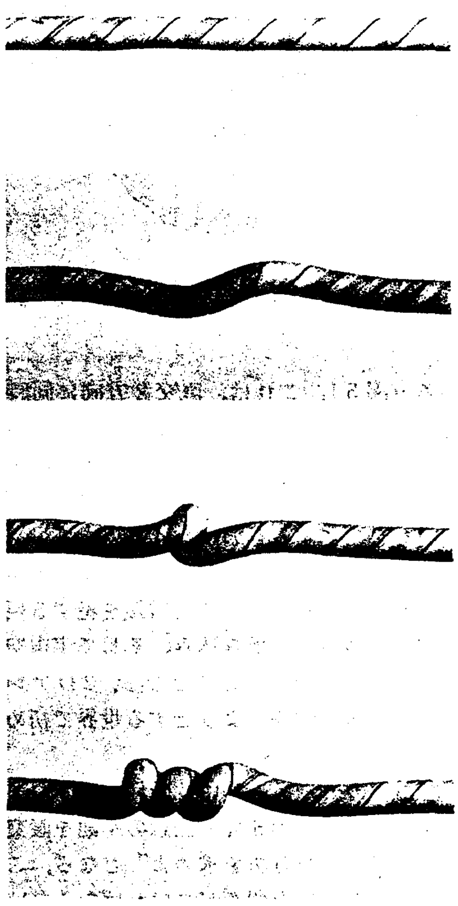
に奇妙と思われることには、伸展したマストをケーブルによって縮める方向に引っ張ると自動的にコイル状に畳み込まれ、またケーブルを緩めるとまっすぐに伸びることである。　そこには一見コイル状に巻くための何の外力も働いていないのにである。　これは何故なのだろうかを、発明の過程を逆にたどってみよう。

まず手始めに、これと類似の自然現象を二三調べてみよう。

少年時代には誰でも一度はゴム動力の模型飛行機を作ったことがあると思う。

ゴムひものはしを巻いて行くと、ゴムひもはだんだんかたく捻られていって、その殆ど限度と思われるところにくると、突然こぶが一つできる。　それでもなお巻き続けると、ほぼ一回巻く毎に一つのこぶができるようにしてこぶが増える。

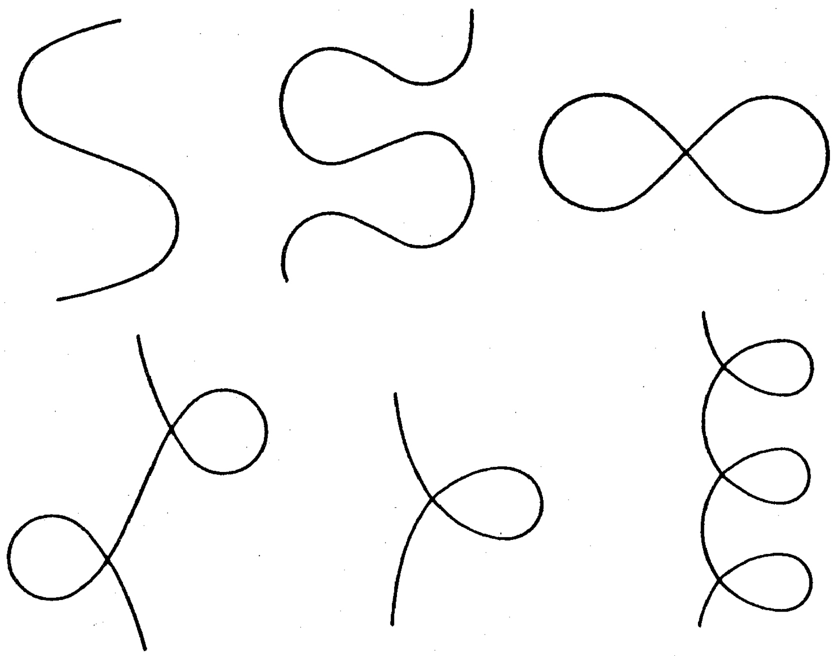
こぶの出来方は離散的であって、決して連続でなく、また半こぶの様なものは生じない。　私達は、ゴムひもの変形を調べるために、直径5センチメートルにおよぶ太いゴムひもを作ってもらい、観察した（3図）。　そうして、こぶとい



3図　ゴムひものこぶの生成

うのはひとつの輪（コイル）であり、従ってこの現象は捻りのモードから曲げ（つまりコイル）のモードへの飛び移り現象として説明しうることがわかった。

EULER の弾性曲線（エラスチカ）のことは、大学で教わったか或は弾性学のテキストで眺めたか、たいていの人は知っている。　4図のような美しい平面曲線がかかれてあって、EULER ，LAGRANGE の故事と、これは曲率に関する厳密な表示で解いた弾性曲線であるという程度の知識も普通である。ところでこれは極く細長い梁の両端に荷重をかけたときの、梁の示す最も自然な変形を物語っている。



4図　弾性曲線（エラスチカ）

あるいは”弾性”を象徴するカーブと見てよいであろう。

これだけの類似現象の知識が集積されれば、われわれは問題の核心にかなり近いところに来ているといってよい。　最終的に到達するのは LOVE の本の４００ページにある　　KIRCHOFFの式

$$T + 1/2\,(A\kappa^2 + B\kappa'^2 + C\tau^2) = \mathrm{const}$$

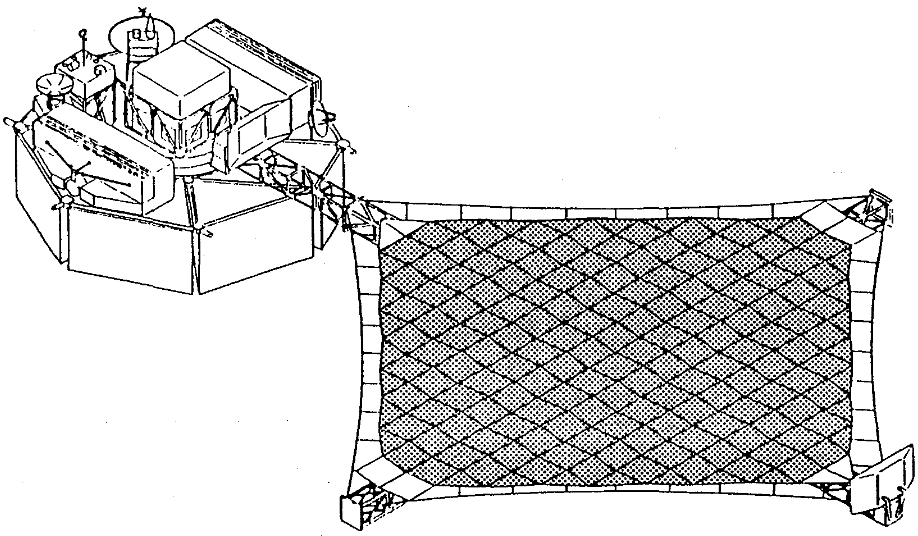
である。　これは細いロッドの基礎方程式で、Tは軸力、$\kappa^2, \kappa'^2, \tau^2$ はそれぞれ曲率の成分および捻率、A，B，C，はそれぞれの剛性である。これはつまりコイラブル・ロンジロン・マストの挙動を、EULER の平面エラスチカの延長として、三次元のエラスチカと関係深い現象として見ようとするのである。　細いロンジロンが圧縮をうけるとき、荷重がある限界値に到達すると、ゴムひもの現象

のように、変形が圧縮のモードより曲げのモード（コイル）に飛び移り、そしてこれが離散的に続き、結局コイル状に畳み込まれるというストーリーを想定するのである。

実際三次元のエラスチカの解を調べてみると、コイル状の解は確かに存在する。しかしそれ以外の解も多数存在することであり、エンジニアリングの問題としては、どのような手段でコイル状変形の解を端から順に作りだして行けるかということになる。　これは言ってみれば弾性不安定現象を完全にコントロール下において、次から次へと飛び移りを起こさせることである。　その巧妙な仕掛は、図のように三本のロンジロンをたがいに弾性的に結合することで、これにより構造としての安定をうるとともに、一種の対称性の条件を課し、他の解を排除してしまうのである。。

二次元のたたみこみの幾何学（二次元展開アレーと VON KARMAN の板の方程式）

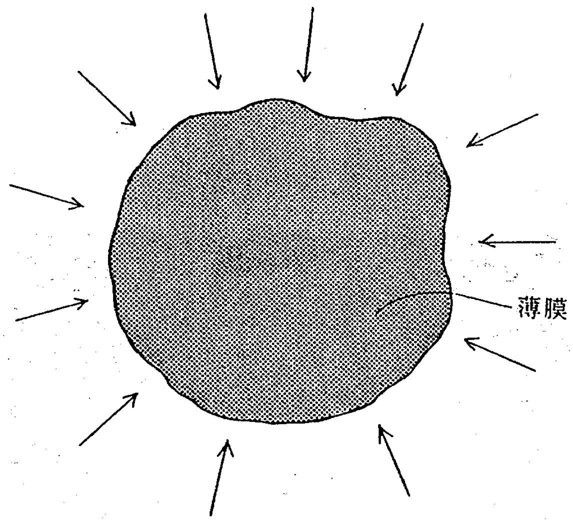
１９９２年のフライトが予定されているフリーフライヤーでは、二次元展開アレー実験が計画されている（５図）。　これは、直交二方向に同時に展開する薄膜のアレーであって、それゆえ２Ｄアレー（2-DIMENSIONALLY DEPLOYABLE ARRAY）と略称される。　近未来の宇宙ミッションでは、巨大な平面膜を必要とするものがたくさなる。　ソーラーセルアレー、レンズアンテナ、ソーラーセイル等はその典型である。　それゆえ常識を絶する巨大な膜を地上で製造し、畳み込み、



５図　スペースフライヤーと二次元展開アレー
（２Ｄアレー）

そして宇宙空間で展開する技術が絶対に必要となる。　２Ｄアレー実験はこの問題を解決しようとする世界で初めての試みである。

さて、膜の畳み込みという幾何学の問題を形式的に図示すると（６図）、”任意の平面を直交二方向一様に畳み込む方法を求めよ”となる。　ここで解は直交二方向に周期性がなければならない。なぜならばその面の巨大であることを考えれば、周期性のない解が実行不可能であることはすぐ分かることである。

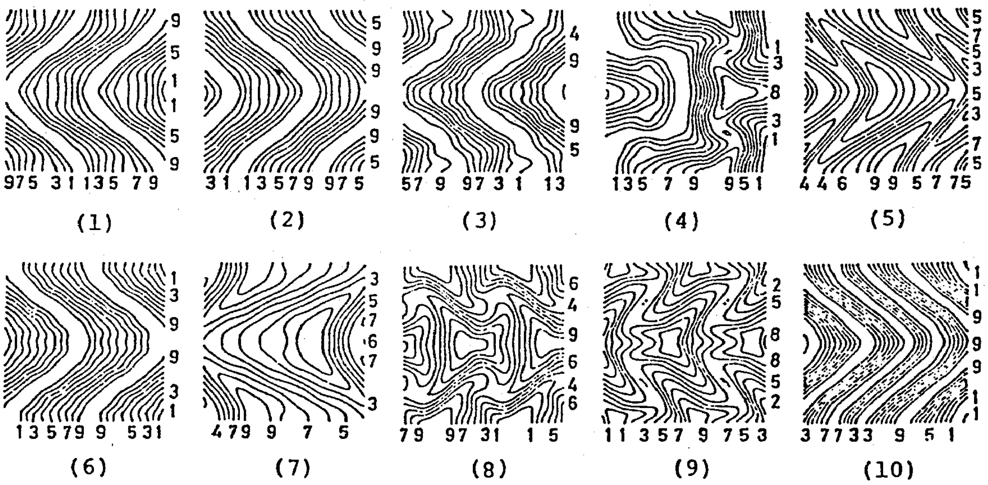


６図　膜の畳み込みの幾何学的問題

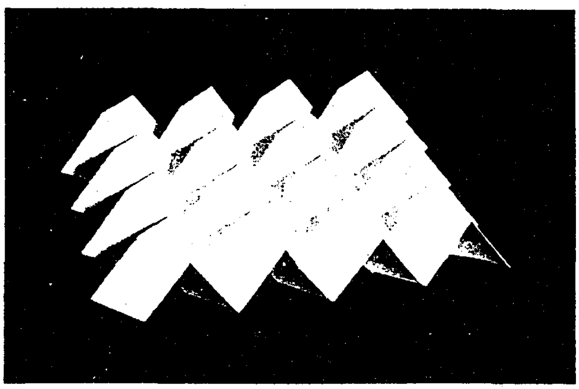
もちろんこのような幾何学の問題について、　EUCLID の原論に解を見つけることはできない。　ただ漫然と思索することで解けるであろうか。　どうも見込みはなさそうである。　読者だったらどうするだろうか?

弾性学の手法でこの幾何学の問題を解けないだろうか、というのが今から１０数年前に私と谷沢一雄氏とが議論したときの発想である。　それは次のような多少三段論法的筋道からなっている。まず問題を仮想的に板の弾性変形問題であるとする、そうすれば問題は　VON　KARMAN　の板の有限変形の微分方程式で記述され何等かの手法で解くことが出来よう、しかるのち板の厚みを限りなく零に近付ければ初めの幾何の問題を解いたことになる。　厚みの限りなく零に近い板は、歪エネルギで曲げと面内の成分の比が限りなく零に近く（それぞれが板厚の何乗に比例するかでわかる）、その変形は紙で象徴されるような面内剛性無限大の幾何学的変形（不伸張変形）の解になるはずである。

７図は、このようにして計算され無作意にとりだした１０個の周期解であり、板の面外変形を地形図のように等高線で表してある。　これらの解のなかでもっともエネルギレベルの低いものを追求していって最後に得られた曲面のレリーフ



7図　膜の畳み込みの数値解

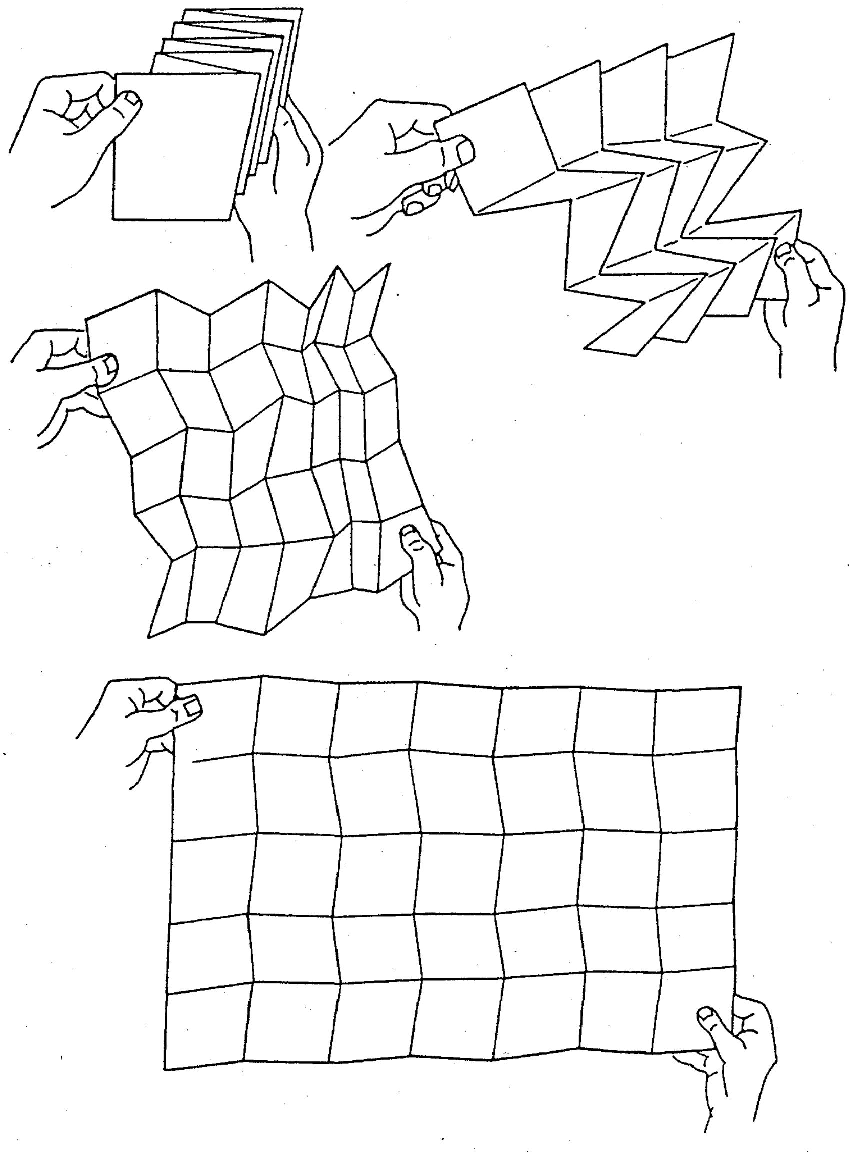


8図　膜の畳み込みの解レリーフ

は8図のようになる。　このレリーフは,VON　KARMANの方程式の適用範囲（有限変形）ということでは一応誇張であるが、実際はどこまでも正確であることが幾何学的に証明される。　こうして問題はきれいに解かれたのである。

しかしわれわれにとって不幸なことに、１９７０年代はこの曲面の出番のあるような時代ではなかった。　そこで、この曲面の面白い特徴をもっともよく表現できるモデルとして、折り畳み地図に応用してみようということになった。　折りの設計は酒巻正守氏、原図は陣内秀信氏、特製折り機は鈴木健一氏、日本オリベッティの協力で、楽しい仕事が行われた。　出来上がったたベネチアの地図は出色の作で、数学モデルとしてはたいへんぜいたくな作品であった。　しかしこのモデルを通じてこの曲面についてのいろいろな性質が分かった。　まず展開が殆ど自動的に行われること、任意の方向に引っ張れば直交二方向に展開すること、直交二方向の展開は同期すること等等、数学や弾性学では容易には認識できないことが、このモデルをいじりまわすことで誰にでも肌を通じて理解されたように

思う。　人間の手仕事をつうじての五感に、代わるもののないものを感じたことであった。　またこの折り方は、折り紙の世界にすこしずつひろまっている（９図）。



９図　MIURA-ORI（BRITISH ORIGAMI より）

（一部省略）

ここで述べた三つの展開構造物の概念の発想が、全く無関係と思われる弾性学上の諸原理から導かれたことは、非常に意外の感がするとされるであろう。

筆者の感想はこうである。

まず展開構造物のようなかたちの概念を創るという作業は、人のもっているありとあらゆる経験や知識を動員して、一つのまとまった概念に仕上げるもので、一般的な手法というものは存在しないのではないかと思われる。　論理的考察は

するが、しばしば論理を超越した仮説を考えたり、空想実験をしたり、手仕事でモデルを作ったり、街を歩き回ったり、ときには何もしない、しかしその底流には脈々とながれる強烈な動機がある、手法といえばそんなものだろうか。

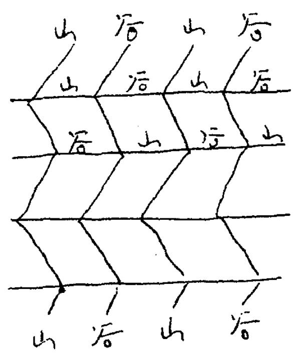
さりとはいいながら、仮説をたてたり確かめたりする絶対的なよりどころは、こと三次元空間のかたちのデザインに関する限り、空間の科学すなわちトポロジー、幾何学、連続体の力学の厳然たる法則の支配下にあるはずであるということ、そしてこれらの法則は想像以上にひろい普遍性をもっていることである。　問題なのは、例にあげたEULER, MAXWELL, VON KARMAN 等の法則や方程式を、普通一般のテキストに”書かれた通りに”、そして通常われわれが適用範囲としてしまっている領域に狭く限定してしまう　”PERCEPTUAL BLOCK”（認知障害）であると思う。

討論（DISCUSSIONS）

<u>たたみこみの幾何学</u>　　　　　　　　　　　　三浦　公亮（宇宙科学研）

Q．地図の折りたたみについて、右図のように縦の折り線は山折りまたは谷折りで一貫しているのに対して横の直線は山折りと谷折りが交互になっている。この縦と横の折り方を逆にすることができるか？

出原　栄一（大阪芸大）



A．できない。直線の方の折り方を一貫させると折りたためない。

Q．三角柱を折りたたむときの変形は中央の三叉の部品の剛性にも依存するのではないか。　　　　　　　　　　　　高木　隆司（東京農工大・物理）

A．そのとおり。外側の３本の棒と三叉の剛性の比で形がきまる。

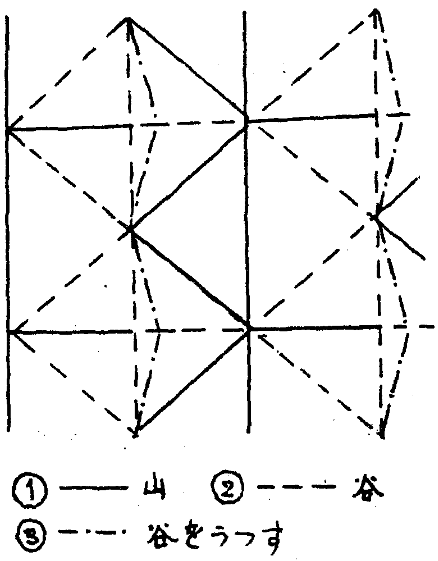
Q．１：三浦折りの平行四辺形には特別な意味がありますか？
２：当日質問しませんでしたが、縮小によってできる干割れと、たるんできるシワは不足と過剰という関連はするが反対の現象に思われます。干割れが不可逆なのに対して、シワはいわば唯の折りたたみであり可逆な場合もあります。薄い表層のシワの形がもつ情報につい以前に考えたことがあります（未発表）。もし何かお考えがあればお聞かせ下さい。

小川　泰（筑波大・物理工）

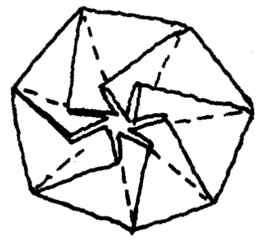
A．１：平行四辺形の内角は任意です。但し90°つまり普通の直交折りがむしろ特異点をなし、このとき、縦、横の折りは独立におこなわれ、連動しなくな

ります。
２：しわとわれ目の対比は面白い発想だと思います。しかし実際に関連する法則があるかどうかは、また、しわの持つ情報については、脳の記憶という意味での連想はありますが、それ以上のことはやっておりません。

C．折り紙で球面の照明器具を作ったことがあります。



①②の折りのときは下図のようにたためますが



③のように谷を移すと全体が球面状になります。

奥村　昭雄（木曾三岳奥村設計所）