

## 相転移とCAM理論

東大理 香取真理・鈴木増雄

## § 1. 序

格子点上におのおのスピนว変数が定義され最近接相互作用をしているモデルを考える。2次元以上の強磁性相互作用系では、2点相関関数の相関距離  $\xi$  が臨界温度  $T_c^*$  で発散する。 $T = T_c^*$  では相関関数はべき乗則に従う。Fisher<sup>1)</sup> はこのような臨界現象に対して次のような表示を与えた、

$$C(r) \equiv \langle S_0 S_r \rangle - \langle S_0 \rangle \cdot \langle S_r \rangle \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}}, \quad (1.1)$$

$$\xi \sim |T - T_c^*|^{-\nu}. \quad (1.2)$$

臨界指数  $\nu$  と  $\eta$  をミクロな計算から求めることが統計力学の一つの課題である。fluctuation-susceptibility 関係<sup>2)</sup> より、例えば帯磁率  $\chi_0$  の臨界異常を示す指数  $\gamma$  はスケール関係

$$\gamma = \nu (2 - \eta) \quad (1.3)$$

により  $\nu$  と  $\eta$  から求められるからである。しかし相関距離  $\xi$  の発散や臨界温度  $T_c^*$  での相関関数のスケール不変性といった現象は無限自由度系ではじめて実現されるものであり、有限系の解析からその振舞いを評価するためには極限操作が必要となる。

ここではコヒーレント異常法 (CAM)<sup>3)</sup> を用いて行った研究について報告する。

## § 2. 系統的クラスター平均場近似

次のマスター方程式で記述される動的イジング模型を考える<sup>4)</sup>、

$$\frac{d}{dt} P(\{S_i\}; t) = - \sum_j W_j(S_j) \cdot P(\{S_i\}; t) + \sum_j W_j(-S_j) \cdot P(\{\dots, -S_j, \dots\}; t). \quad (2.1)$$

ただし、 $S_i$  は格子点  $i$  上のイジング・スピนว変数;  $S_i = \pm 1$ .  $P(\{S_i\}; t)$  は時刻  $t$  に系が configuration  $\{S_i\}$  にある確率であり、遷移確率  $W_j(S_j)$  は

$$W_j(S_j) = \frac{1}{2\tau_0} (1 - S_j \tanh \beta E_j) \quad (2.2)$$

$$E_j = \mu_B H(t) + J \sum_{k: \text{neighbors of } j} S_k \quad (2.3)$$

で与えられるとする。

このスピนว系を近似するのにクラスター平均場近似<sup>5)</sup> を考える。図1に示したようなサイト  $S_0$  を中心としたサイズ  $L$  のクラスター  $\Omega(L)$  を考える。すべての最近接サイトが  $\Omega(L)$  内

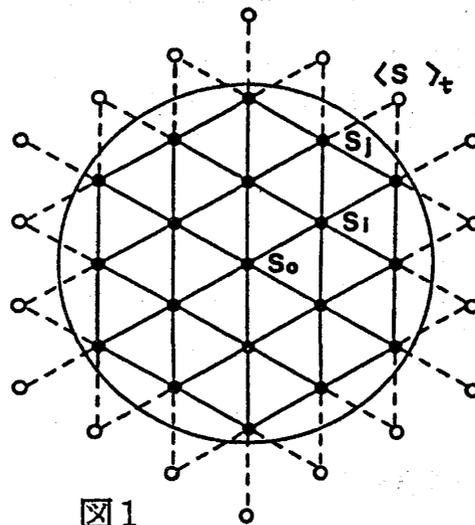


図1

にある場合は、そのサイト上のスピン変数は (2.1) のマスター方程式に従うが、 $\Omega(L)$  の外のサイトのスピン変数はある平均値  $\langle S \rangle_t$  で置き換える（ここでは空間的に一様なモデルを考えることにする）。この近似によって得られる（ $\Omega(L)$  内のスピン変数の）確率分布関数を  $P_L(\{S_i\}_{i \in \Omega(L)}; t)$  と記すことにする。さきにおいた平均値  $\langle S \rangle_t$  は、このクラスタの中心のスピン  $S_0$  の期待値と等しくなるようにセルフ・コンシステントに決めることにする、

$$\langle S \rangle_t = \langle S_0(t) \rangle \quad (2.4)$$

ただし

$$\langle S_0(t) \rangle \equiv \sum_{\{S_i\}} S_0 P_L(\{S_i\}_{i \in \Omega(L)}; t). \quad (2.5)$$

クラスタがただ一つのスピンのみを含む場合には、これは鈴木・久保の平均場近似<sup>4)</sup>となる。サイズ  $L$  を逐次大きくすることにより系統的にクラスタ平均場近似の列を得ることができる。

セルフ・コンシステンシ条件 (2.4) のためおのおのの近似はある臨界温度  $T_c(L)$  を持ち、そこで帯磁率  $\chi_0$  や緩和時間  $\tau$  の近似体は古典的指数をもつ発散を示す、

$$\chi_0(L, T) \simeq \bar{\chi}(L, T_c(L)) \cdot \varepsilon(L)^{-\gamma_0}, \quad (2.6)$$

$$\tau(L, T) \simeq \bar{\tau}(L, T_c(L)) \cdot \varepsilon(L)^{-\Delta_0}, \quad (2.7)$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \Delta_0 = 1, \quad (2.8)$$

ただし、

$$\varepsilon(L) = (T - T_c(L)) / T_c(L) \geq 0. \quad (2.9)$$

近似的臨界温度  $T_c(L)$  とそこでの平均場臨界係数  $\bar{\chi}(L, T_c(L))$ ,  $\bar{\tau}(L, T_c(L))$  はクラスタサイズ  $L$  を変えると値を変えるが、臨界指数  $\gamma_0$ ,  $\Delta_0$  は  $L$  と無関係に一定値に保たれる。

### § 3. 収束する近似列とコヒーレント異常スケーリング

近似的臨界温度  $T_c(L)$  は各クラスター平均場近似においてクラスターの外側の効果が中心のスピ  $S_0$  に伝播する度合いを示す feed-back 関数  $f_L(T)$  が値 1 をとる点として求まる。 $T_c(L)$  は真の臨界温度  $T_c^*$  の上限になっており、 $L \rightarrow \infty$  で  $T_c^*$  に収束することが証明できる<sup>6)</sup>、

$$T_c(L) > T_c^* \quad (\text{for } L < \infty) \quad (3.1)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} T_c(L) = T_c^* \quad (3.2)$$

$T_c(L)$  と  $T_c^*$  の差として定義される量

$$\delta(T_c(L)) = (T_c(L) - T_c^*) / T_c^* \quad (3.3)$$

はそれゆえ、 $L \rightarrow \infty$  で単調に減少し零になるため近似の度合いを表すパラメーターとして使える。

我々は、有限サイズスケーリングの知識<sup>7)</sup>を用いることにより平均場臨界係数がこの近似の度合いに対して次のようなスケーリング則を示すことを導いた<sup>5) 6)</sup>、

$$\bar{\chi}(L, T_c(L)) \sim \delta(T_c(L))^{-(\gamma - \gamma_0)} \quad (3.4)$$

$$\bar{\tau}(L, T_c(L)) \sim \delta(T_c(L))^{-(\Delta - \Delta_0)} \quad (3.5)$$

このコヒーレント異常スケーリング<sup>3)</sup>は、真の臨界指数  $\gamma, \Delta$  がその古典値  $\gamma_0, \Delta_0$  よりもそれぞれ大きいならば臨界係数が近似を上げると漸近的に発散する(コヒーレント異常を示す)ことを意味する。逆に言えば系統的クラスター近似列を構成し、その係数の変化を見ることから真の臨界温度  $T_c^*$  と臨界指数  $\gamma, \Delta$  の値が評価できることになる(コヒーレント異常法—CAM)。

### § 4. 応用と今後の課題

我々は、CAMにより2次元及び3次元のイジング模型に対して  $T_c^*$  と  $\gamma$  の値を高い精度で評価することができた<sup>8, 9)</sup>。2次元動的イジング模型に対しては、図2に示したように近似列を構成し、図3の結果を得た。式(3.5)のスケーリング則より  $\Delta \simeq 2.15 (\pm 0.02)$  という評価値が得られたが<sup>5)</sup>、この値は例えばモンテ・カルロ・シミュレーションなど他の方法で評価されている値<sup>10)</sup>と一致する。これらの結果からコヒーレント異常スケーリングは非常に小さい

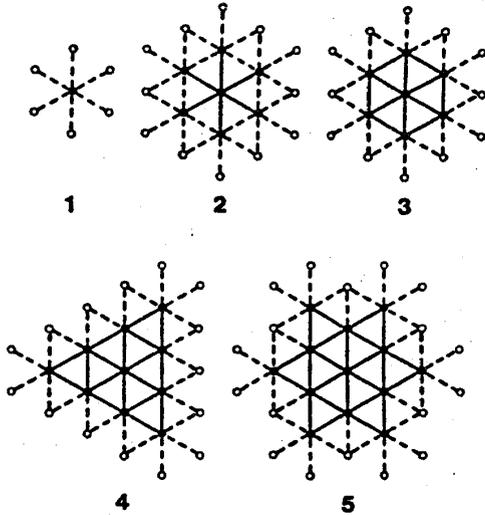


図2

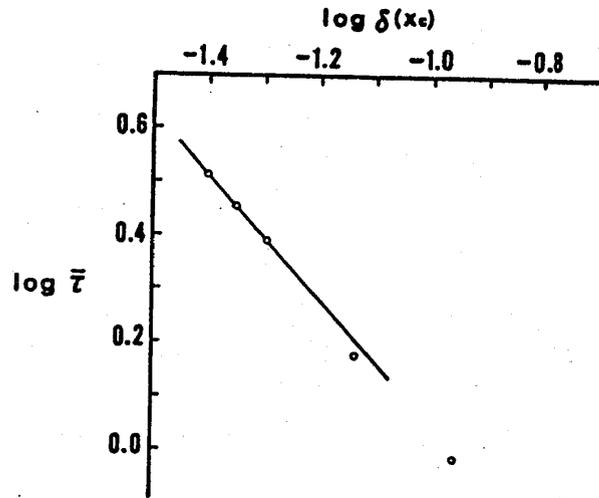


図3

クラスターによる近似体から高い精度で成立することがわかる。このことは実際に応用する際、CAMが有効であることを示しているが、また他方で平均場近似（セルフ・コンシステントな理論）の重要性を再認識させる。

我々のクラスター平均場近似は元来の無限系を図4のような cluster-Cayley tree で近似したものと解釈できる<sup>11)</sup>。式 (2.4) のセルフ・コンシステンシイ条件は、この tree が無限にのびたときの定常解をもとめることに ( $T > T_c(L)$  では) 対応する。クラスター平均場近似は、この意味でそれ自身無限和から成る近似体と言える。クラスター間の相互作用も考慮しているからこそ各近似体はそれぞれ相転移・臨界現象を示す。ゆらぎの効果はクラスター内の自由度を

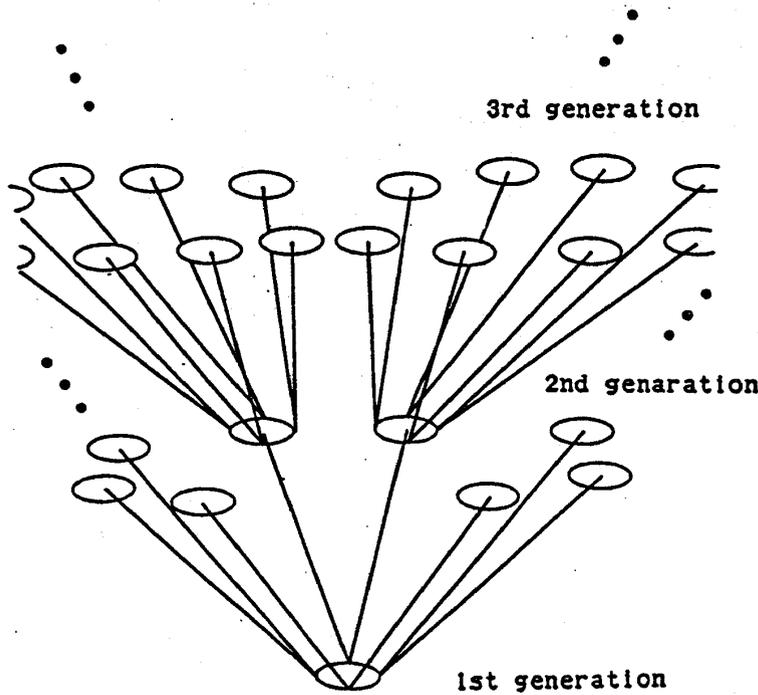


図4

正確に取り扱うことにより取り込まれ、フラクタルな指数で記述されるスケーリング性は臨界係数のコヒーレント異常によって表現される。

無限に広がる相互作用のネットワークと、無限自由度系固有のゆらぎのスケーリング性という2つの「無限」を分離して扱おうというCAM理論の試みは、今後より多種の多体問題の解析に応用される<sup>12-14)</sup>ことが期待される。

### 謝辞

筆者は、宮下精二氏、胡曉氏に有用な助言と協力を得たことを感謝します。

### 参考文献

- 1) M. E. Fisher: J. Math. Phys. 5 (1964) 944.
- 2) M. E. Fisher: Nobel Symposia 24 (1974), Collective Properties of Physical Systems (Academic Press).
- 3) M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 4205.
- 4) M. Suzuki and R. Kubo: J. Phys. Soc. Jpn. 24 (1968) 51.
- 5) M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 807.
- 6) M. Suzuki, M. Katori and X. Hu: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 3092.
- 7) K. Binder: Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, 1983) Vol. 8, p. 39.
- 8) M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 3113.
- 9) X. Hu, M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 3865.
- 10) S. Miyashita and H. Takano: Prog. Theor. Phys. 73 (1985) 1122.
- 11) M. Katori: Ph. D. Thesis, Univ. of Tokyo, Tokyo, 1988.
- 12) X. Hu and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) No. 3.
- 13) X. Hu and M. Suzuki: to appear in Physica A.
- 14) M. Takayasu and H. Takayasu: Phys. Lett. A.