研究会報告

光通信理論の数学的基礎
―非可換系のエントロピー論と光通信過程―

東京理科大学　大矢雅則

§1．序

通信理論は，1948年頃の Shannon [22] の研究に端を発し，その後 Kolmogorov [10] 等により測度論的に定式化され，数学的体系として完成されている．この通信理論は，通信の対象となる力学系が可換な構造をもつもので可換力学系の通信理論である．　ところで，今日非常に注目を集めているレーザーは，非可換な構造をもつ量子力学をベースとしているのでレーザー等の光を入力源とする光通信は，可換な通信理論では完全に記述することはできない．　従って，数理的興味と同様に，今までの可換力学系の通信理論に代わって，新たな理論（量子通信理論）の構成が必要となってきた．　非可換力学系における通信理論を数学的に厳密に構成しようとする試みはすでに様々な人々によって種々な観点から研究されている．　そのひとつの課題がエントロピー理論の数学的定式化である．　この小論文は，今日までに得られている結果の一部を報告することにある．　特に，(1) 可換系のエントロピー理論との比較で非可換系のエントロピー理論を復習し，(2) 光通信過程の数学的定式化を考え，それによって通信過程の効率を厳密に論ずる．

なお，様々な物理的対象を含む理論を作るためには作用素代数論のテクニックが必要となるので，ここでのエントロピー理論は作用素代数の枠組の中で論ずることにする．　Hilbert 空間上の通常のエントロピー理論に関しては文献 [28,32] を参照してほしい．

量子力学系における確率の概念は，古典力学系におけるそれとは異なり，力学系の存在の仕方それ自体と係わっており，けっして人間の無知さ，測定の不確定さのみに依存しているものでない．ここでは，量子系の力学を論ずるための基礎となる量子系の確率論の数学的定式化について考えてみる．　以下，この量子系の確率論を非可換確率論と呼び，通常の確率論を可換確率論と呼ぶ．　非可換確率論は，von Neumann の量子力学の厳密な定式化，Segal の非可換積分論，Dixmier のトレースの理論，Umegaki の条件付期待値の理論に端を発し，二重可換子に関する Tomita の独創的な仕事と Haag，Hugenholtz，Winnink のＫＭＳ条件をベースとして様々な方向へ発展してきている [29]．

そのひとつが，C*代数による非可換力学系の定式化である．　この C*代数によ

る物理系の記述は相転移や場の相互作用を厳密に考察する際の必要性から生じたものであるが，ここで物理系の C*代数による記述の長所と欠点について考えておこう．よい理論（よい数学的記述）とは，(1) 単純でわかりやすいこと，(2) 少ない原理により多くのことを説明できること，(3) その原理が人間の認識の根底に係わっていること，をみたす理論でなければならない． 例えば，Newton 力学は基本的に慣性の法則，力と加速度の法則，作用反作用の法則というごく簡単な法則に帰着され，それらにより惑星の運動などの複雑な現象まで説明できたのであり，さらにこの理論は現在では相対論，量子論に多くの点で凌駕されてはいるが，その当時は力の，運動の，物質の，時空の，宇宙の認識に大きな糧を人類に提供したものであった． さてC*代数の量子系の記述に話をもどすが，C* 代数による記述は Newton の理論や相対論の偉大さ，Heisenberg の行列力学，Schrodinger の波動力学の画期性等とはもとより比すべきものではないが，von Neumann の意志に沿って量子系を記述する上での整合性はかなりあるものと思われる [17,21]． その長所は：

(M1) 物理量をC*代数 $\mathscr{A}$ の元のうちの自己共役なものとみなせ，状態は $\mathscr{A}$ 上のノルムが1の正値線形汎函数と考えることができ，単純である．（数学として複雑なところはほとんど枝葉的なところであるから全く気にする必要はない．）

(M2) 可換系（測度論的に記述される系）も，C* 代数の方法でその主たる部分が議論でき，都合がよい．

(M3) ほとんどの物理系は，Fock 空間では記述できなくても C* 代数の方法では記述可能である． （このことが C* 代数による記述の存在理由のひとつになっているのである．）

このような長所があるにもかかわらず，次のような不満（欠点）もある： (D1) 一般的な物理理論の話はできても特殊な物理体系を記述する手段を供給していない，従って定量的結果を得ることはほとんどできない． (D2) 技術的問題として，非有界な物理量を直接取り扱うことができない． (D3) 作用素代数の数学的結果に物理法則の原理になるだけのものがない． (D4) 無限自由度を問題にしなければ不必要である．

以上あげた欠点はよく聞かれることであるが，(D1) は全く正しい意見であり，他の現代（抽象）数学同様，様々な力学系の詳細を記述するには現在の作用素代数の方法は不十分である． (D2) は本質的なことではない． 非有界ということ自体ある意味で，物理量の数学的抽象であり，それなしですませられれば，それはそれでよいものだからである． しかも，非有界作用素も作用素代数の範疇で間接的には扱うこ

とも可能であるから，(D2) はたいした問題ではない． (D3),(D4) は全くもっともなことで，従って C* 代数の方法は早晩これを包み，より透徹性をもち，かつ人間の認識過程に直接関与する記述方法に置き換えられるであろう． なお (D4) に関して言えば，たしかに有限自由度の系で物理理論を構成できれば，それに越したことはないが，今のところ有限自由度系のみ考えたのではほとんどの物理現象は説明できず，又ある場合は物理理論がかえって難解なものになってしまい役に立たなくなってしまうのである． 現実が非線形であるからといって，非線形を仮定して自明なこと以外ほとんどなにも説明できない数学よりは，線形という近似（あるいは，ある程度厳密性を犠牲にした理論）の下でも多くの事を認識できる方が勝るのであり，これと同じ意味で，無限自由度という仮定も今のところ我々の認識には有限自由度という事実よりも有用なのである．

以上のように C* 代数による物理系の記述は多くの欠点を有しているが，その単純さと汎用さのため，物理理論の数学的枠組を作る上での便利さは今のところかなり大きいと思われるので，ここでも C* 代数による記述を使って，まず非可換系のエントロピー理論を考えてみよう．

§2． 量子力学系とエントロピー

量子系のエントロピーの定式化は 1930年頃 von Neumann [30] によって始められたが，彼の仕事は前節の Shannon 等の仕事 [11,22,27] に約 20年も先立つものであった． 現在では，この von Neumann のエントロピーが物理学において有用な役割を果たしていることは周知のことである． 彼のエントロピー（以下 v.N. エントロピーという）は密度作用素 ρ で表される状態に対して次のように定義されている． $\mathcal{H}$ を可分な Hilbert 空間，$B(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体，$T(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素の全体とし，$T(\mathcal{H})_{+,1}$ を集合 $\{\rho\in T(\mathcal{H});\ \rho\geq 0,\ \mathrm{tr}\rho=1\}$ とする． この $T(\mathcal{H})_{+,1}$ の元が密度作用素である． さらに，$B(\mathcal{H})$ 上の正規状態 ϕ はある $\rho\in T(\mathcal{H})_{+,1}$ を使って $\phi(\cdot)=\mathrm{tr}\rho\,\cdot$ と表せることがわかっているので，以下 ρ そのものを状態とよぶことにする． 任意の状態 ρ の v.N.エントロピーは

$$S(\rho) = -\mathrm{tr}\rho\log\rho \tag{2.1}$$

で与えられる． Umegaki [26] は 1962年頃，量子系の相対エントロピーを σ-有限かつ半有限な von Neumann 代数上の２つの状態に関して定式化したが，これを v.N. エントロピー同様，２つの密度作用素 ρ と σ で表される状態に関して書き表わす

と

$$S(\rho \mid \sigma) = \mathrm{tr}\rho(\log\rho - \log\sigma) \qquad (2.2)$$

となる． この Umegaki の相対エントロピーを Araki [1,2] は一般の von Neumann 代数上の状態のそれに拡張し，Uhlmann [25] は更に ＊-代数上の正値線形汎函数に関するそれに拡張した． このような量子系のエントロピー論の歴史をふまえた上で，以下エントロピー理論の最近の流れの中で私の研究グループが扱ってきたことを中心として述べていきたい．

今，2つの C* 力学系を $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(R))$，$(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathfrak{S}}, \overline{\alpha}(R))$ とする． すなわち，$\mathcal{A}$，$\overline{\mathcal{A}}$ は単位元を含む C* 代数，$\mathfrak{S}$，$\overline{\mathfrak{S}}$ は各々 $\mathcal{A}$，$\overline{\mathcal{A}}$ 上の状態の全体，$\alpha(R)$，$\overline{\alpha}(R)$ は各々 $\mathcal{A}$，$\overline{\mathcal{A}}$ 上の強連続な自己同型群とする． 以下，Shannon の考えに沿って，このように上記の2つの力学系を考えることにする． というのは，ほとんどの物理系において，その力学的変化を論じる場合は，ひとつの力学系において状態の変化を考えれば十分であるが，情報理論と物理学を同時に包含する理論を作るためには2つの力学系を設定して始める方が都合がよいからである．

この2つの力学系間の状態変化とそれに付随するエントロピー論に関して我々が調べたいことは次のような問題である．

(1) 状態の変化を記述する力学的な変化（この変換をチャンネルとよぶ）の諸性質（エルゴード特性等）を調べること．

(2) 連続系も含み，また非平衡系の解析にも役立つように C* 力学系における状態のエントロピーを定式化し，その性質を調べること．

(3) 今，ある状態 ϕ が他の状態 $\overline{\phi}$ に変化したとき，ϕ と $\overline{\phi}$ の相関を表す，所謂合成状態を構成すること．

(4) ϕ の情報量のどれほどが $\overline{\phi}$ へ誤りなく伝えられたかを表す相互エントロピーを定式化すること．

(5) レーザー通信などの数学的基礎となる量子情報理論を構築すること．（例えば，光通信過程の数学的定式化など）

(6) 非可逆過程の散逸性をエントロピーの立場から取り扱うこと．

(7) 様々な相転移現象をエントロピーを用いて統一的に扱うこと．

以上の問題のうち (2),(3),(4) はかなり具体的で，かつ今までのエントロピー論の流れの中にある問題であり，従ってこれから説明するようにかなり定式化が進んでいるが，(1),(5),(6),(7) は幅の広い問題でまだその端緒に付いたばかりである．

なお，以下の議論に使われている数学的用語に不案内な読者は文献 [23,24,29,31]

を参照してほしい．

§3．　von Neumann エントロピーとC*-力学系のエントロピー

前述したエントロピー $S(\rho)$ の主要な性質をまず記しておこう[28]．

<定理3．1>　$S(\rho)$ の性質

(1) 正値性：　$S(\rho) \geqq 0$．

(2) 凹　性：　$\rho,\sigma \in T(\mathcal{H})_{+,1} \Rightarrow S(\lambda\rho+(1-\lambda)\sigma) \geqq \lambda S(\rho)+(1-\lambda) S(\sigma)$．

(3) 不変性：　$\rho \to \rho'$ で $\{\rho$ の固有値$\} \cup \{0\} = \{\rho'$ の固有値$\} \cup \{0\} \Rightarrow S(\rho) = S(\rho')$.

(4) 下半連続性：　$\|\rho_n - \rho\|_1 \to 0 \Rightarrow S(\rho) \leqq \liminf_{n\to\infty} S(\rho_n)$．

(5) 加法性：　$S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2)$．

(6) 劣加法性：　$S(\sigma) \leqq S(\sigma_1)+S(\sigma_2)$．

(注) (5),(6) で $\rho_k,\sigma_k \in T(\mathcal{H}_k)_{+,1}(k=1,2)$，$\sigma \in T(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_{+,1}$，$\sigma_k = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j}\,\sigma$ $(k,j=1,2,\ k\neq j)$ である．

ところで，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をまず始めに与えておくことにより定められたエントロピー $S(\rho)$ を用い，相転移等を論ずると不都合なことがあるので，C* 系の状態 ϕ のエントロピーを考えておく必要がある．　そこで，$(\mathfrak{A},\mathfrak{S},\alpha(R))$ を C*-力学系とし，$\mathcal{S}$ を弱 ＊ コンパクトな $\mathfrak{S}$ の 凸部分集合とする（これらの数学的条件はけして強いものではなく，物理的にも自然なものである）．　この $\mathcal{S}$ として重要なものは，(1) $\mathcal{S}=\mathfrak{S}$，(2) $\mathcal{S}=I(\alpha)$（α-不変状態の全体），(3) $\mathcal{S}=K_\beta(\alpha)$（ある定数 β(温度の逆数) で α に関するKMS（平衡）状態の全体）などがある[6,29]．

$\phi \in \mathcal{S}$ に対して，$\mathrm{ex}\mathcal{S}$（$\mathcal{S}$ の端点の集合）を準台としてもつ $\mathcal{S}$ 上の正則な極大 Borel 測度 μ が存在して，

$$\phi = \int_{\mathcal{S}} \omega\, d\mu$$

と端点分解できる．　この分解測度 μ は，一般に一意ではないので，その集合を

$M_\phi(\mathfrak{X})$ とする． 今，

$$D_\phi(\mathfrak{X}) \equiv \{\mu \in M_\phi(\mathfrak{X});\ \exists \{\mu_k\} \subset R^+,\ \exists \{\phi_k\} \subset \mathrm{ex}\mathfrak{X},\ \textstyle\sum_k \mu_k = 1,\ \mu = \sum \mu_k \delta(\phi_k)\}$$

$$H(\mu) \equiv -\textstyle\sum_k \mu_k \log \mu_k \quad (\forall \mu \in D_\phi(\mathfrak{X}))$$

とおくとき，$\mathfrak{X}$ に関する状態 $\phi \in \mathfrak{X}$ のエントロピー $S^{\mathfrak{X}}(\phi)$ を

$$S^{\mathfrak{X}}(\phi) \equiv \begin{cases} \inf\{H(\mu);\ \mu \in D_\phi(\mathfrak{X})\} \\ \infty \qquad (\text{if } D_\phi(\mathfrak{X}) = \emptyset) \end{cases} \tag{3.1}$$

で定める [13]． この定義で $D_\phi(\mathfrak{X}) = \emptyset$ のとき，$S^{\mathfrak{X}}(\phi) \equiv \infty$ としたのは ϕ が非可算個の純粋状態が混り合ったものであれば，ϕ の $\mathfrak{X}$ における混り具合，すなわち，$\mathfrak{X}$ における不確定さは当然 ∞ とみなせるからである． さらに，我々のエントロピーは $\mathfrak{X}$ に依存していること，すなわち，<u>どのような基準から ϕ の不確定さを計るかに依存していること</u>が重要である． 例えば，$\phi \in K(\alpha)$ に対して，$S^{K(\alpha)}(\phi)$，$S^{I(\alpha)}(\phi)$，$S^{\mathfrak{S}}(\phi)$ は一般に全て異なるのである．

こうして導入された C^* 力学系の状態 $\phi \in \mathfrak{X}$ のエントロピーは，v.N. エントロピーと同様，(1) 正値性，(2) ゲージ不変性，(3) 凹性 などの基本的性質を有するが，さらに次の性質も持っている [13,18]．

<u>＜定理３．２＞</u> $\phi(\cdot) = \mathrm{tr}\rho\,\cdot$ のとき，$S^{\mathfrak{S}}(\phi) = -\mathrm{tr}\rho \log \rho$.

<u>＜定理３．３＞</u> 下半連続性：$\{\phi_n\} \subset K_\beta(\alpha)$ で，$\|\phi_n - \phi\| \to 0$ のとき

$$S^{K(\alpha)}(\phi) \leqq \liminf S^{K(\alpha)}(\phi_n)$$

上の＜定理３．２＞より，エントロピー $S^{\mathfrak{X}}(\phi)$ は v.N. エントロピーの拡張になっていることがわかる． 又＜定理３．３＞が一般の $\mathfrak{X}$，すなわち $S^{\mathfrak{X}}(\phi)$ に対して成立するかどうかはまだ完全にはわかっていない．

このように $S^{\mathfrak{X}}(\phi)$ は v.N. エントロピーと同様な性質も有しているが，von Neumann エントロピーと異なり，相転移が起る系に対しても使うことができるものである． 例えば，ϕ があるゲージに対して非平衡な状態であるとすれば，$S^{\mathfrak{X}}(\phi)$ は平衡状態のエントロピーとは異なる特質をもつと思われる．

§4．　チャンネル

ある物理系の状態の変化を記述するかなり一般的な変換をチャンネルとよぶ[5, 12]．　この量子系のチャンネル Λ^* は次の（i),（ii）を満たす $\mathfrak{S}$ から $\overline{\mathfrak{S}}$ への写像として定義されている：（i）Λ^* の共役写像 $\Lambda : \overline{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ が完全正写像

（i.e. $\sum_{i,j=1}^{n} B_i^* \Lambda(A_i^* A_j) B_j \geqq 0$ for $\forall n \in N$, $\forall A_i \in \overline{\mathcal{A}}$, $\forall B_j \in \mathcal{A}$)

（ii）$\mathcal{A}$, $\overline{\mathcal{A}}$ が　von Neumann 代数のとき Λ は正規写像.

チャンネルの例として，物理系では次のようなものがよく現れる.

（例１）　ユニタリー変換：$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = B(\mathcal{H})$, $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}} = T(\mathcal{H})_{+,1}$, $U_t = e^{itH}$ ($t \in R$, H は系の Hamiltonian）のとき，状態 ρ の時間発展

$$\Lambda^*{}_t \rho = U_{-t} \rho U_t \ .$$

（例２）　量子観測：（例１）と同じ $\mathcal{A}$, $\mathfrak{S}$ に対して，コンパクト作用素 Q のスペクトル分解を $\sum_n q_n Q_n$ とする．　このとき，Q を観測した後での ρ の変化

$$\Lambda^* \rho = \sum_n Q_n \rho Q_n \ .$$

（例３）　力学的半群よる時間発展：（例１）と同じ $\mathcal{A}$, $\mathfrak{S}$ と力学的半群 $\{V_t ; t \in R^+\}$ に対して，

$$\Lambda_t^* \rho = V_t^* \rho V_t \ .$$

（例４）　開放系：ある観測の対象となる系 Σ_1 が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で記述される外界 Σ_2 と相互作用していたとし，それらの初期状態が各々 ρ, θ であったとすると，Σ_1 と Σ_2 の時刻 t での結合状態 ϕ_t は，$\phi_t = U_t^*(\rho \otimes \theta) U_t$ となる．　ここで，$U_t = \exp(itH)$ で H は Σ_1 と Σ_2 の合成系の全ハミルトニアンである．　このとき，興味ある系 Σ_1 の状態 ρ の変化は $\rho \to \Lambda \rho = \mathrm{tr}_2 \phi_t$ で与えられる．　なお，"tr_2" は合成系 $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ において外界 $\Sigma_2(\mathcal{K})$ に関してのみトレースを取ってしまうこと（reduction）を示している.

エントロピー増大に関しては次が証明できる [20]．

<定理４．１>　チャンネル Λ^* が $\mathrm{tr}\Lambda^* \rho = \mathrm{tr}\rho$, $\forall \rho \in \mathfrak{S}$ を満たすとき，

$$S(\rho) \leqq S(\Lambda^* \rho).$$

［定義４．１］　Λ^* を $\mathfrak{S}$ から $\overline{\mathfrak{S}}$ へのチャンネルとする.

(1) Λ^* が定常的 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\Lambda \circ \overline{\alpha}_t = \alpha_t \circ \Lambda$ $(\forall t \in R)$．

(2) Λ^* がエルゴード的 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ Λ^* が定常的で $\Lambda^*(\mathrm{ex}\, I(\alpha)) \subset \mathrm{ex}\, I(\overline{\alpha})$.

(3) Λ^* が KMS $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Λ^* が定常的で $\Lambda^*(K(\alpha))\subset K(\overline{\alpha})$.

(4) Λ^* が確定的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Λ^* が1対1で純粋的（i.e., $\Lambda^* : \mathfrak{S}_{pure} \to \overline{\mathfrak{S}}_{pure}$）

かつ直交的（i.e., $\phi \perp \psi \Rightarrow \Lambda^*\phi \perp \Lambda^*\psi$）.

(5) Λ^* が無秩序的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\Lambda^*\phi = \Lambda^*\psi$（$\forall \phi$, $\psi \in \mathrm{ex}\mathfrak{S}$）.

この定義にあるエルゴード型のチャンネルの特徴付及びその力学的性質の研究は興味のある問題ではあるが，まだそれほど進んでいない．とくに,Λ^* による変換の下で $S^{\mathcal{S}}(\phi)$ が不変になるのはどういう場合か，すなわち，エントロピーが力学的不変量になるときとチャンネルのエルゴード特性との関連を調べることはかなり興味ある問題である．

§5．相対エントロピー

２つの状態 ϕ，ψ に関する相対エントロピー $S(\psi \mid \phi)$ は前述したように Umegaki [26] によって導入され，Araki [1,2]，Uhlmann [25]，Donald [4] によって一般化された量であるが，この量は，２つの状態 ψ と ϕ の一種の "離れ具合" を表す量となっていて，その意味で ψ と ϕ の違いを論ずる上で有用なものである．ここでは Araki による定義を紹介しておこう．

任意の $A \in \mathfrak{M}$ に対して，ベクトル x, y を用いて，$\phi(A) = \langle x, Ax\rangle$，$\psi(A) = \langle y, Ay\rangle$ と表されている von Neumann 代数 $\mathfrak{M}$ 上のある正規状態 ϕ と ψ に対して（x, y が $\mathcal{K}$ の正錐 [27] に属しているとき），作用素 $S_{x,y}$ を定義域 $\mathfrak{M}y + (I - s^{\mathfrak{M}'}(y))\mathcal{K}$ 上に次のように定める．

$$S_{x,y}(Ay + z) = s^{\mathfrak{M}}(y)A^*x \quad (A \in \mathfrak{M}), \quad s^{\mathfrak{M}'}(y)z = 0.$$

ここで，$s^{\mathfrak{M}'}(y)$ は $\mathfrak{M}$ に属するベクトル y の台，$\mathcal{K}$ は $\mathfrak{M}$ が作用している Hilbert 空間である． この作用素 $S_{x,y}$ によって，相対モジュラー作用素 $\Delta_{x,y}$ が，$\Delta_{x,y} = (S_{x,y})^*\overline{S_{x,y}}$ で定められ，これを使って相対エントロピー $S(\psi \mid \phi)$ は次のように与えられている [1,2]．

$$S(\psi \mid \phi) = \begin{cases} -\langle y, (\log\Delta_{x,y})y\rangle & (\psi \ll \phi) \\ +\infty & (\text{その他}). \end{cases} \tag{5.1}$$

特に，$\mathfrak{M}=B(\mathcal{H})$ で ϕ,ψ が $\phi(A)=\mathrm{tr}\,\sigma A$，$\psi(A)=\mathrm{tr}\,\rho A$ である密度作用素 σ,ρ によって与えられるとき，この Araki の相対エントロピーは Umegaki の相対エントロピー

$$S(\psi\mid\phi)=\mathrm{tr}\,\rho(\log\rho-\log\sigma)$$

に一致する． 更に，ϕ と ψ がC^*-力学系の状態であるときの相対エントロピーは，Uhlmann によって定式化されているが，この相対エントロピー $S(\psi\mid\phi)$ は，Araki の 相対エントロピー $S(\tilde{\psi}\mid\tilde{\phi})$ に一致することがわかる [8]． ただし，$\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ は von Neumann 代数 $\pi_{\phi+\psi}(\mathfrak{A})''$ 上へ の ϕ と ψ の拡張である（$\pi_{\phi+\psi}$ は $\mathfrak{A}$ の GNS 表現）． この相対エントロピーは古典系のそれと同様な性質を有している． 例えば，任意の２つの状態 ϕ，ψ と状態の列 $\{\phi_n\}$，$\{\psi_n\}$ に対して，次の定理が成立する．

<u><定理５．１> $S(\psi\mid\phi)$ の性質</u>

（1）正値性： $S(\psi\mid\phi)\geqq 0$．

（2）同時凸性： $S(\lambda\psi_1+(1-\lambda)\psi_2\mid\lambda\phi_1+(1-\lambda)\phi_2)\leqq\lambda S(\psi_1\mid\phi_1)+(1-\lambda)S(\psi_2\mid\phi_2)$．

（3）下半連続性： $\lim_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi\|=0$，$\lim_{n\to\infty}\|\phi_n-\phi\|=0$ であれば，
$S(\psi\mid\phi)\leqq\liminf_{n\to\infty}S(\psi_n\mid\phi_n)$．

（4）加法性： $S(\psi_1\otimes\psi_2\mid\phi_1\otimes\phi_2)=S(\psi_1\mid\phi_1)+S(\psi_2\mid\phi_2)$．

（5）チャンネル Λ^* に対して，

$$S(\Lambda^*\psi\mid\Lambda^*\phi)\leqq S(\psi\mid\phi)\ .$$

ここでは詳しく論ずることはできないが，この相対エントロピーは非可換系の十分性の概念と結び付き，平衡状態や定常状態の特徴付けにも役立っているのである．

§６． 合成状態と相互エントロピー

量子系において，状態 $\phi\in\mathcal{S}\,(\subset\mathfrak{S})$ がチャンネル Λ^* によって，状態 $\overline{\phi}=\Lambda^*\phi\in\overline{\mathfrak{S}}$ に変化したとき，<u>ϕ の情報のどれほどが $\overline{\phi}$ へ遺伝したかを表す相互エントロピー</u>を定式化するには，古典系と同様，ϕ と $\overline{\phi}$ の相関を表す合成状態をまず定めなければならない．

$\phi \in \mathfrak{S}$ と，その端点分解の測度 $\mu \in M_{\phi}(\mathfrak{S})$ に対して，

$$\Phi_{\mu}^{\mathfrak{S}} = \int_{\mathfrak{S}} \omega \otimes \Lambda^{*} \omega \, d\mu \tag{6.1}$$

とおき，これを $\mathfrak{S}$ と μ に関する ϕ と $\Lambda^{*}\phi$ の相関を表す合成状態とよぶ [14, 15]． この $\Phi_{\mu}^{\mathfrak{S}}$ は $\mathfrak{A}$ と $\overline{\mathfrak{A}}$ が可換の場合は，通常の古典系の合成状態（合成測度）に一致することがわかる． さらに ϕ と $\Lambda^{*}\phi$ の相関を表さない合成状態（直積状態）は

$$\Psi = \phi \otimes \Lambda^{*} \phi$$

で与えられる． これらの合成状態と前節の相対エントロピー $S(\cdot \mid \cdot)$ を使い，$\phi \in \mathfrak{S}$ と μ 及び Λ^{*} に関する相互エントロピーを

$$I_{\mu}^{\mathfrak{S}}(\phi ; \Lambda^{*}) \equiv S(\Phi_{\mu}^{\mathfrak{S}} \mid \Psi)$$

で定め，$\phi \in \mathfrak{S}$ と Λ^{*} に関する相互エントロピーを

$$I^{\mathfrak{S}}(\phi ; \Lambda^{*}) \equiv \limsup_{\varepsilon \to 0} \{ I_{\mu}^{\mathfrak{S}}(\phi ; \Lambda^{*}) ; \ \mu \in F_{\phi}^{\varepsilon}(\mathfrak{S}) \} \tag{6.2}$$

で定める [16,20]． ここで，

$$F_{\phi}^{\varepsilon}(\mathfrak{S}) \equiv \begin{cases} \{ \mu \in D_{\phi}(\mathfrak{S}) ; \ S^{\mathfrak{S}}(\phi) \leqq H(\mu) \leqq S^{\mathfrak{S}}(\phi) + \varepsilon < +\infty \} \\ M_{\phi}(\mathfrak{S}) \quad (\text{if } S^{\mathfrak{S}}(\phi) = \infty) \end{cases}$$

である．

以下，$I_{\mu}^{\mathfrak{S}}(\phi ; \Lambda^{*})$ を $I_{\mu}(\phi ; \Lambda^{*})$ などと $\mathfrak{S}$ は省略してかき，また ϕ の代わりに ρ を使った場合は $\mathfrak{A} = B(\mathcal{K})$，$\overline{\mathfrak{A}} = B(\overline{\mathcal{K}})$ とする． 相互エントロピーに関する基本的性質として次の定理が証明できる [15,16]．

＜定理６．１＞ μ が $F_{\phi}^{\varepsilon}(\mathfrak{S}) \cap D_{\phi}(\mathfrak{S})$ に属し，かつ直交的（i.e., ϕ の成分である ϕ_{k} の台が互いに直交する）であるとき，

$$0 \leqq I_{\mu}(\phi ; \Lambda^{*}) = \int_{\mathfrak{S}} S(\Lambda^{*}\omega \mid \Lambda^{*}\phi) \, d\mu < S(\phi) + \varepsilon .$$

<系6.2>　$0 \leqq I(\rho\,;\Lambda^*) \leqq S(\rho)$.

上記の定理とその系は古典系における Shannon の基本定理の量子力学版である．さらに，チャンネルのエルゴード特性と関連がある次の結果も得られている．

<定理6.3>　(1) Λ^* が確定的であれば $I(\rho\,;\Lambda^*) = S(\rho)$.

(2) Λ^* が無秩序的であれば $I(\rho\,;\Lambda^*) = 0$.

(3) ρ が α-不変状態で，ρ の固有値が零でなくかつ非縮退のとき，Λ^* がエルゴード的ならば $I(\rho\,;\Lambda^*) = S(\Lambda^*\rho)$.

これらの定理に相互エントロピーとしての性質，つまり ϕ が Λ^* によって変換されたとき，ϕ の情報のうちのどれほどが $\Lambda^*\phi$ へ遺伝したかを表す量の持つ物理的特性をみることができるであろう．　なお上の相互エントロピーは，任意の状態 ϕ と ψ に関しても定式化できるが [20]，かなり複雑になるので，ここでは割愛する．　また，最近 Connes-Narnhofer-Thirring [3] は，Flow エントロピーを論ずる際，状態のエントロピーと汎函数 ε_μ を考えているが，これは我々の相互エントロピーの特殊な場合として容易に導かれることに注意しておく．

以下では，ここまで論じてきた種々の概念（チャンネル，エントロピー，相互エントロピーなど）の光通信過程への応用を考えていこう．

§7.　光通信路（チャンネル）の数学的構成法

節4で量子系におけるチャンネルの数学的な定義を与えたが，ここでは光通信過程 [7,9,32,33] を念頭において，通信過程において侵入してくる雑音と漏れ出ていく損失を，陽に考慮したチャンネルの数学的構成法を述べる．

今，入力系と出力系の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ に加えて，外部効果を記述する二つの Hilbert 空間 $\mathcal{K}_1$，$\mathcal{K}_2$ を用意する．　ここでは $\mathcal{K}_1$ は雑音系の Hilbert 空間とし，$\mathcal{K}_2$ は損失系のそれとする．　ここで $B(\mathcal{H}_2)$（$\mathcal{H}_2$ 上の有界線形作用素の全体）から $B(\mathcal{H}_1)$ への写像Λ を次のように定める：

$$\Lambda = \gamma \circ \pi \circ a \tag{7.1}$$

なお，γ，π，a は各々以下の様に与えられる写像である．

（1）　a は任意の $A \in B(\mathcal{H}_2)$ に対して，

$$a(A) = A \otimes I$$

で与えられる $B(\mathcal{H}_2)$ から $B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ への写像で，増幅変換とよばれるものである．

（2） π は $B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ から $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ への完全正写像で $\pi(I_2) = I_1$ をみたすものである． ただし，I_1 は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$ 上の恒等作用素とする．

（3） γ は，ある $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$ と任意の $Q \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ に対して

$$\gamma(Q) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}_1} \sigma Q$$

で与えられる $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $B(\mathcal{H}_1)$ への写像である．

<u>＜定理７．１＞</u> 上記の Λ は $B(\mathcal{H}_2)$ から $B(\mathcal{H}_1)$ への完全正写像である．

さて，上記の３つの写像 a，π，γ の共役写像 a^*，π^*，γ^* は次のように定められる：

（1*） a^* は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$ への写像であり，簡単な計算の結果

$$a^*(\theta) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}_2} \theta \ , \ \theta \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$$

と表せることがわかる．

（2*） π^* は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ への写像である． さらに，雑音も損失もなければ，情報は正しく伝送されると考えられるから，そのときは π^* を $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ への確定的チャンネルであるとしてよい．

（3*） γ^* は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ への写像であり，定義より，任意の $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ と任意の $Q \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\gamma^*(\rho)Q &= \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1} \rho\gamma(Q) \\ &= \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1} \rho(\mathrm{tr}_{\mathcal{K}_1} \sigma Q) \\ &= \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1} \rho \otimes \sigma Q \end{aligned}$$

となるから，

$$\gamma^*(\rho) = \rho \otimes \sigma$$

と表せる．

以上より，量子力学的チャンネル Λ^* は

$$\begin{aligned} \Lambda^*(\rho) &= a^* \circ \pi^* \circ \gamma^*(\rho), \\ &= \mathrm{tr}_{\mathcal{K}_2} \pi^*(\rho \otimes \sigma), \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1) \end{aligned} \tag{7.2}$$

と書き表されるのである． 従って，雑音 σ と合成系間のチャンネル π^*がわかれば，光通信系のチャンネル Λ^* が構成できたことになる． この構成法は文献 [14] で導入されたもので，この構成法に従い，σ と π^* を適当に与えてやると量子通信

路を通して情報を伝送したときの情報伝送量，誤り確率などのよく使われている結果を再び導くことができるものである． 以下，これをみていこう．

§８． 光通信過程における誤り確率の一般的定式化

上で述べたチャンネルの構成法のひとつの応用として，入力状態として光パルスを用いた ＰＣＭ とＰＰＭ に対する符号語誤り確率を与える一般式を導いておこう．

後の部分節で，より具体的に，入力状態としてコヒーレント状態及び Squeezed状態を用いた場合の誤り確率を与える公式を導くが，この節の議論はその基礎となるものである．

今，ある情報を適当な手段で符号化し符号シンボルと呼ばれる元の集合 $\mathfrak{C}=\{c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}\}$ のシンボル系列（符号語）$\Pi c(k)$（$c(k)\in\mathfrak{C}$）で表示したとする． このシンボル及びシンボル系列を光の信号を表す量子符号語に置き換える必要があるが，この対応を量子符号化という． 今，シンボル $c_i \in \mathfrak{C}$ に対応する量子符号（状態）を ξ_i とし，その集合を $\Xi=\{\xi_0, \cdots, \xi_{n-1}\}$ とする． シンボルの個数 n は当然場合場合によって異なるが，ここでは議論を簡単にするために，通常のモールス信号による符号化と同様 $n=2$ として考えることにする． すなわち，

$$\mathfrak{C} = \{c_0, c_1\} \quad (= \{0, 1\}\text{とかくことが多い})$$
$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1\}$$

である． このとき，例えば，シンボル系列（0，1，0，0，1）は（$\xi_0, \xi_1, \xi_0, \xi_0, \xi_1$）という光信号によって伝送されるのである．

さて，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ で記述される入力側の ξ_0 として真空状態を表す密度作用素 $|0\rangle\langle 0|$ をとり，これを $\xi_0^{(1)}$（${}^{(1)}$は $\mathcal{H}_1$ の添字に対応）で表し，ξ_1としてはある適当な光の量子状態をとり，$\xi_1^{(1)}$ と表すこととする． 従って，チャンネル Λ^* を通して２つの状態 $\xi_0^{(1)}$ と $\xi_1^{(1)}$ が送られるが，このときの誤り確率を計算する公式を，Λ^* 構成法のひとつの応用として導く．

誤り確率を導くにあたり，以下簡単のため雑音は量子効果である真空のゆらぎのみによるものとしよう． すなわち，σ は Hilbert 空間 $\mathcal{K}_1$ における真空状態ベクトル $|0\rangle$ を使って，$\sigma=|0\rangle\langle 0|$ と表されるものとする． 従って，２つの信号 ”0” と ”1” を送るとき，”1” が光の損失のため ”0” と間違われることはあっても，”0” が ”1” となることはない． よって，信号 ”1” （入力状態 $\xi_1^{(1)}$）がチャンネル Λ^* を通して送られたとき，それが受信側で信号 ”0” と誤る確率は

$$q_e = \mathrm{tr}\Lambda^*(\xi_1^{(1)})\xi_0^{(2)}$$

すなわち，

$$q_e = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(\mathrm{tr}_{\mathcal{K}_2}\pi^*(\xi_1^{(1)}\otimes\sigma))\xi_0^{(2)} \tag{8.1}$$

である． この式で，$\xi_0^{(2)}$ は受信側（$\mathcal{H}_2$）の真空状態である．

さらに，t_0重誤り訂正可能な ＰＣＭ 変調の場合には，Ｎ（＞t_0）をある符号語の中に含まれる"1"の個数とすると，この符号語が誤って伝えられる確率 p_e は

$$p_e = \sum_{j=t_0+1}^{N} {}_N C_j q_e^j (1-q_e)^{N-j} \tag{8.2}$$

となる． ただし，${}_N C_j = N!/j!(N-j)!$ である．

また，ＰＰＭ 変調の場合には，"1"は一つの符号語の中には１個しかないので，その符号語が誤って伝えられる確率 p_e は

$$p_e = q_e \tag{8.3}$$

となる．

以上により，式（7.2）で与えられるチャンネル Λ^* に対して通信の誤り確率を計算する一般式（8.1）が導かれたが，この式よりチャンネル Λ^* を物理的状況に応じて具体的に構成すれば，そのチャンネルの効率がわかるのである．

詳しく論ずる時間がないが，コヒーレント光や，Squeezed光を使って情報を伝送する場合の誤り確率は上記の式によって導くことができるし，光変調やチャンネルの効率も相互エントロピー $I(\rho;\Lambda^*)$ と $S(\rho)$ の比 $I(\rho;\Lambda^*)/S(\rho)$ を計算することによって調べられることに注意しておく． これらに関しては，文献［19,20,33］を参照して頂きたい．

§９． 非可逆過程への相互エントロピーの応用

最後に非可逆過程への相互エントロピーの応用を論じておく．

非可逆現象をミクロな量子力学をベースにして厳密に取り扱うことは非常に難しい問題である． しかしながら，非可逆過程の散逸性に着目し，この性質をもつ力学的半群を用いて形式的に非可逆過程を定式化することは容易なことである．この節では，力学的半群による定式化の範疇で相互エントロピーの力学的変化（物理的な直観からすると相互エントロピーは時間に関しては単調減少するはず）を考察する．

（この節の議論は［16,20］とそこで使った文献参照）．

以下，$\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}$ を v.N. 代数とし，チャンネルは少なくとも１つの定常な忠実正規状態を有する一径数力学的半群 $\Lambda(R^+)$ の共役写像とする． この $\Lambda(R^+)$ に対して，

$$\mathcal{A}_\Lambda \equiv \{A \in \mathcal{A};\ \Lambda_t(A) = A,\ \forall t \in R^+\}$$

$$\mathcal{A}_C \equiv \{A \in \mathcal{A};\ \Lambda_t(A^*A) = \Lambda_t(A^*)\Lambda_t(A),\ \forall t \in R^+\}$$

とおく． このとき，$\mathcal{A}_\Lambda$ は $\mathcal{A}$ の v.N. 部分代数となり，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}_\Lambda$ への条件付期待値 $\mathcal{E}$ が存在する．

<u>＜定理９．１＞</u> 定理６．１ の条件がみたされ，かつ $\mathcal{A}_\Lambda = \mathcal{A}_C$ であり，$\mathcal{A}$ がＩ型であれば，

$$I_\mu(\phi;\Lambda^*_t) \downarrow I_\mu(\phi;\mathcal{E}^*) \quad (t\to\infty).$$

<u>＜定理９．２＞</u> $\mathcal{A}=B(\mathcal{H})$ であり，$\mathcal{A}_\Lambda=\mathcal{A}_C$ であれば，次が成立する：

(1) $I(\rho;\Lambda^*_t) \downarrow I(\rho;\mathcal{E}^*) \quad (t\to\infty)$.

(2) $I(\rho;\mathcal{E}^*)=0,\ \forall\rho \iff \Lambda(R^+)$ は唯ひとつの定常状態を有する．

(3) ユニタリー作用素 U_t が存在して，$\Lambda_t = AdU_t$，ならば $I(\rho;\Lambda^*_t)=S(\rho)$.

＜定理９．１＞と＜定理９．２＞の (1) は，Λ_t が散逸的であれば，初期状態 ϕ の有していた情報が時間とともに徐々に失われていくことを示し，＜定理９．２＞の (2) は系の定常状態が唯ひとつであれば初期状態の情報はそれが平衡状態に達したとき完全に失われることを示している． これらのことは非可逆散逸過程の力学とその物理的状況を考え合わせればかなり当然なことであろう．

なお，ここで論じたエントロピー理論を使って量子観測過程を解析することもできるが，この話題は別の機会に譲ることにしょう．

参考文献

[1] H. Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11, 809 (1976).

[2] _______, Relative entropy for State of von Neumann algebras II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13, 173 (1977).

[3] A. Connes, H. Narnhofen and W. Thirring, Dynamical entropy of C*algebras and von Neumann algebras, preprint (1987).

[4] M. Donald, On the relative entropy, Commun. Math. Phy. 105, 13,(1986).

[5] M. Echigo and M. Nakamura, A remark of the concept of channels, Proc. Japan Acad. 38, 234, (1962).

[6] R. Haag, N.M. Hugenholtz and M. Winnink, On the equilibrium states in quantum statistical systems, Commun. Math. Phys., 5 (1967).

[7] C.W. Helstrom, J.W.S. Liu and J.P. Gordon, Quantum mechanical communication theory, Proc. IEEE 58, 1578,(1970).

[8] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Sufficiency and relative entropy in *-algebras with applications in quantum systems, Pacific. J. Math. 107, 117 (1983).

[9] O. Hirota, 光通信理論, 森北出版, (1985).

[10] A.N. Kolmogorov, On the Shannon theory of information transmission in the case of continuous signals, Trans. IEEE on Information Theory, 2, 102 (1956).

[11] K. Kunisawa, 情報理論 I , 共立出版, (1983).

[12] M. Ohya, Quantum ergodic channels in operator algebras, J. Math. Anal. Appl. 84, 318 (1981).

[13] ______, Entropy transmission in C*-dynamical systems, J. Math. Anal. Appl. 100, 222 (1984).

[14] ______, On compound state and mutual information in quantum information theory, IEEE Information Theory, 29, 770 (1983).

[15] ______, Note on quantum probability, L. Nuovo Cimento 38, 402(1983).

[16] ______, State change and entropies in quantum dynamical systems, Springer Lecture Note in Math, 1136, 397 (1985).

[17] ______, 現代数学と現代物理学の交流, 科学 47, 728 (1977).

[18] M. Ohya and T. Matsuoka, Continuity of entropy and mutual entropy in C*-dynamical systems, J. Math. Phys. 27(8), 2076 (1986).

[19] M. Ohya, H. Yoshimi and O. Hirota, 量子制御過程における誤り確率の厳密な導出, to appear.

[20] M. Ohya, A mathematical formulation of quantum information theory and its applications to irreversible processes, to appear.

[21] I. Ojima, 場の量子論と非平衡・不可逆過程, 素粒子研究, 47, 6, (1987).

[22] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27, 379 and 623 (1948).

[23] M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Springer Lecture Note in Math., 128, (1970).

[24] M. Tomita, Quasi-standard von Neumann algebras, Mimeographed Notes, Kyushu Univ., (1967).

[25] H. Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in interpolation theory, Commun. Math. Phys. 54, 21 (1977).

[26] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, IV, (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep. 14, 59 (1962).

[27] H. Umegaki and M. Ohya, 確率論的エントロピー, 共立出版, (1983).

[28] ______________________, 量子論的エントロピー, 共立出版, (1984).

[29] H. Umegaki, M. Ohya and F. Hiai, 作用素代数入門, 共立出版, (1985).

[30] J. von Neumann, Die Mathematischen Grundlargen der Quantenmechanik, Springer-Berlin, (1932).

[31] H. Yukawa and T. Toyoda 編, 量子力学 I, II, 岩波書店, (1978).

[32] 数理科学, エントロピー特集号, サイエンス社, 12月号, (1987).

[33] 光通信理論とその応用, 森北出版, 準備中.