[15] Katori, M. and Suzuki, M. J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 3753.

[16] J. L. Monroe, Phys. Lett. 131A (1988) 427.

[17] Suzuki, M., J. Stat. Phys. 53 (1988) 483.

[18] Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 2310, および683（レター）.

[19] Suzuki, M., the Proceeding of the 19th Yamada Conference on Ordering and Organization in Ionic Solutions, held at Kyoto, Nov. 9-12, 1987, ed Ise, N. (World Sci. Pub.).

[20] 鈴木増雄,『スピン系のエキゾティックな秩序 ― 超有効場理論とコヒーレント異常法 ―』（物性物理の新概念（培風館）の第一章）.

[21] M. Suzuki, J. Stat. Phys. 49 (1989) 977.

[22] 鈴木増雄, 数理科学『相転移のルネサンス』特集号, 1988年7月号（No.301).

[23] M. Suzuki, in preparation.

2. カノニカル・シリーズの作り方

―クラスター平均場近似と相関等式切断近似 ―

東大・理　香取真理, 鈴木増雄

§1. カノニカル・シリーズ[1)]

コヒーレント異常法（CAM）[1,2)] は, 古典近似を系統的に構成し, そこにみられる漸近的振舞いから真の臨界現象を調べる新手法である。従来, 近似理論は最小の手間で真の現象の核心を衝くことを目的としてきたが, ここでは以下に述べるような性質を持った一連の近似の列（カノニカル・シリーズと呼ぶ）を構成することが重要となる。本講演では, 2次相転移を起こす系に対する研究を報告する。

〔カノニカル・シリーズの特性〕

近似の列 $\{\mathscr{A}_n\}$ が次の3つの性質を持つときこれをカノニカル・シリーズと呼ぶ。[1,2)]

〔1〕 各近似において2次相転移が起こる。しかしながら臨界指数は古典値に固定される。例えば強磁性体の模型における零磁場帯磁率 $\chi_0^{(n)}$ は, セルフ・コンシステンシィ条件から決まる臨界点 $T_c^{(n)}$ において Curie-Weiss 則を示す。つまり, 帯磁率の臨界指数 γ は古典値 $\gamma_0 = 1$ に固定さ

れる；

$$\chi_0^{(n)} \cong \begin{cases} \overline{\chi}_+^{(n)} \cdot \varepsilon(n)^{-1} & (\varepsilon(n) \gtrsim 0) \\ \overline{\chi}_-^{(n)} \cdot |\varepsilon(n)|^{-1} & (\varepsilon(n) \lesssim 0), \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし，

$$\varepsilon(n) = (T - T_c^{(n)})/T_c^{(n)}. \tag{1.2}$$

〔2〕 近似的な臨界点 $T_c^{(n)}$ はある極限において真の臨界点 T_c^* に収束する。例えば近似のラベル n を $T_c^{(n)}$ が単調に減少するように選べたとすると

$$\lim_{n\to\infty} T_c^{(n)} = T_c^* \tag{1.3}$$

と表わせる。ここで我々は近似の度合いと呼ぶ次のような量を導入する，

$$\delta(n) = (T_c^{(n)} - T_c^*)/T_c^*. \tag{1.4}$$

(1.3) の極限は

$$\lim_{n\to\infty} \delta(n) = 0 \tag{1.3'}$$

に他ならない。

〔3〕〔1〕の特性のため，各近似において（平均場）臨界係数が定義できることになる。その結果，例えば帯磁率に対しては，〔2〕で選んだ n でラベルされる係数の列 $\{\overline{\chi}_+^{(n)}\}$ が得られる。これが (1.3) の極限において，次のような羃乗則に従って発散する（コヒーレント異常），

$$\overline{\chi}_+^{(n)} \sim \delta(n)^{-\varphi_\chi}. \tag{1.5}$$

(1.5) で定義される指数 φ_χ は次の関係式によって真の臨界指数 γ と関係づけられる，[1,2]

$$\varphi_\chi = \gamma - \gamma_0 \ (\geqq 0). \tag{1.6}$$

§2. 系統的クラスター平均場近似

§1 で述べたカノニカル・シリーズはどのように構成され得るのであろうか。再び強磁性体のスピン模型を例にとって考える。カノニカル・シリーズの特性〔1〕は各近似が，臨界現象に

関しては Weiss の平均場理論と同じ結論を導くものであるということである。いま求めている近似例が Weiss の平均場理論をクラスターに拡張することによって作られると考えるのはむしろ自然であろう。正しく取扱う領域（クラスター）を大きくすることによりゆらぎの効果が取り込まれ，より良い近似が得られるはずだからである。しかしながら，どのように拡張すべきかは，けして自明なことではない。

カノニカル・シリーズの特性〔2〕は，近似を上げていくと，極限では真の臨界点が得られることを言っている。従って無限系の効果を反映させるために導入した平均場の効果はクラスターを大きくすると共に除々に弱くなっていかねばならない。クラスターを大きくするにつれてどのような割合で弱めていったら良いのであろうか。

我々は平均場の効果を弱めるのに，クラスターそのものを用いることを考えた。具体的に言えば，平均場はクラスターの表面（境界）部分のスピンのみにかけて，内部には一切作用させない。このもとで，オーダーパラメーターはクラスターの中心部のスピンの期待値で表わすようにする。平均場のオーダーパラメーターに対する効果は，それがクラスターの中を通過し伝播する間に，クラスター内部のスピンの統計力学的なゆらぎのために弱められる。クラスター・サイズを大きくするにつれてこの減衰は大きくなり，サイズ無限大の極限においては（$T > T_c^*$ では）平均場の影響は消えるはずである。より具体的な近似列の構成方法は参考文献 3）及び 4）を見ていただきたい。

上述のようにして得られる近似列がカノニカル・シリーズの特性を持つか否かについて，いまのところ次のことがわかっている。まず〔1〕については，クラスター・サイズ L を決めると一意的に $T_c^{(n)}$ が定まり，ここで古典的な臨界現象が見られることが強磁性体の古典スピン模型について示せる。〔2〕の $T_c^{(n)}$ の収束性は，強磁性イジング模型の場合に限って証明されている。[2,5] スケーリング則〔3〕については厳密な証明はない。これは，非自明な模型においては臨界点でのスケーリング則の成立，すなわち非古典的な臨界指数が定義されること自体，一般的に示すことが難しい問題であるためと思われる。しかし，臨界指数を説明するのに通常用いられている有限サイズスケーリングの議論を用いることが許されるならば，我々のクラスター平均場近似が〔3〕の性質を持つことが導出できる（詳しくは文献 2）の Appendix A を参照のこと）。

§ 3. 数値計算

§ 2 で説明した系統的クラスター平均場近似の構成方法によって，カノニカル・シリーズが得られること（特に〔3〕のスケーリング則が漸近的に成立すること）は，数値計算によっても

示されている。2次元及び3次元イジング模型については文献3)を，また2次元動的イジング模型については4)を参照されたい。

§4. 種々の近似列構成法

系統的近似列を構成するのに§2で述べた方針，すなわちクラスターそれ自身を平均場の効果を弱める，いわば緩衝地帯として用いるというアイデアのもとに，いくつかの近似列が構成されている。このうちで特に，伝送行列法を用いさらにセルフ・コンシステンシィ条件をWeiss型ではなくBethe型にしたものはCAMによる解析をする上で非常に有効な方法となっている。これについては，胡・鈴木の報告に詳しい。

§5. CVMはカノニカル・シリーズを構成し得るか

KramersとWannier[6]また菊池[7]によって考案されたクラスター変分法(CAM)は，守田によって一般のクラスターに適用できる形に定式化された。[8]その名のとおり，この方法もまた，平均場近似をクラスターに拡張していく方法であるが，クラスター内全てのスピンに対して種々の平均場が導入されるものであり，§2で述べた構成方法とは異なる系列である。カノニカル・シリーズという呼び名は近似列の構成方法を言うものではなく，近似列の持つ(漸近的)性質を指すものであった。CVMがカノニカル・シリーズとしての性質を備えているか否かは，理論的に興味深い問題といえよう(その特性から近似列の分類をするという作業はあまりなされていない。)

しかしながら，CVMで得られる近似的臨界点が，クラスターを大きくすると真の値に収束するという証明はない。それどころか，CVMではクラスターを大きくするにつれて様々な形の平均場が導入されていくため，セルフ・コンシステンシィ方程式の一般形が書き下せない。このため，我々のクラスター平均場近似のように有限サイズスケーリングとの関係を議論することすら出来ていない。

現在のところ，実際にCVMに従っていくつかの近似を作って数値的にその性質を調べている段階である。詳しくは我々の論文[9]及びこの研究会における藤木氏の報告を参照して頂きたい。数値的データは，CVMによってもカノニカル・シリーズが構成できることを示唆している。

§6. カノニカル・シリーズを得るその他の可能性

CAMは現在いろいろな問題に適用されつつある。これはまた，カノニカル・シリーズを構

成する方法論の開発とも言えよう。木下・川島・鈴木の高温展開あるいは連分数展開といった展開係数からの構成方法，真野氏・中尾氏の自由エネルギーのクラスター展開法に基づく構成方法，また香取・今野による相関関数切断による構成方法（Window-CID-CAM）などが報告されている。

§7. まとめ

統計力学における相転移・臨界現象の研究の一つの流れとして近似理論の構成を目指すものがある。繰り込み群の方法においてもこれを実際に実行するためには近似的に繰り込み変換を構成する必要に迫られるという現状を鑑みると，この方向の重要性は決して衰えていないように思われる。

しかしながら，近似の特性（収束性，特に収束のはやさ）についての研究はかならずしも十分になされているとは言えないのではなかろうか。

CVMは，今回の研究会で守田氏自身から指摘があったように自由エネルギーに対する変分原理を満してはいない。それにもかかわらず変分法に従って求められる近似はカノニカル・シリーズという意味において″性質よく収束する″ように見える。構成された近似列が，かなり普遍的にある性質を持ち得ることは驚きであり，研究すべき事実である。研究会にも出席したProf. C. Tsallis は，この近似列の持つスケーリング則から真の臨界指数が求められること(CAM)に二重の驚きを感じると語ったが，むしろこの２つは同一の数学的構造に起因する事なのであろう。

参考文献

1) M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 4206.

2) M. Suzuki, M. Katori and X. Hu: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3092.

3) M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3113.

4) M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 807.

5) B. Simon: Commun. Math. Phys. **77** (1980) 111.

6) H. A. Kramers and G. H. Wannier: Phys. Rev. **60** (1941) 252, 263.

7) R. Kikuchi: Phys. Rev. **81** (1951) 988.

8) T. Morita: J. Math. Phys. **13** (1972) 115.

9) M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 3753.