1. コヒーレント異常法と超有効場理論

東大・理　鈴　木　増　雄

§1. はじめに

自然を理解するのには，いろいろな仕方があるが，理論物理学のように数理的に解き明かすのが最も強力で有効な方法であろう。しかも，ミクロとマクロを結びつける統計力学は，現代物理学の中でも特に重要な柱である。この研究会のテーマである相転移の統計力学は，その中でも極めて応用範囲の広いものであり，物性物理学に限らず，素粒子物理から宇宙物理，脳の科学に至るまで，その本質を解明するのに役立つ学問である。

最近，相転移の理論に関しては，目覚しい発展があった。すなわち，スケーリング則という現象論を，くり込み群というミクロな方法で解釈できるようになり，相転移の研究は飛躍的に発展した。しかし，この方法にも，長所だけでなく，いろいろな欠点もある。実際，固定点の存在証明や収束性の議論は，ほとんどされていないし，事実，ε－展開等は，漸近展開であって収束しない。

ここで報告する筆者の新しい方法[1]は，古典的な平均場近似を拡張して，相転移の真の振舞いを究明しようとするものであり，したがって極めて直観的でわかり易い方法である。

§2. コヒーレント異常法[1] (CAM) の原理

よく知られているように，ワイスの平均場近似をベーテ近似，菊池近似，小口近似，………といくら大きなクラスターまで拡張して大きなゆらぎをとり込んでも，これらの方法によって得られる臨界現象はすべて古典的である。例えば，このような平均場近似で求めた磁化率 $\chi_0(T)$ はキュリー・ワイス則

$$\chi_0(T) \simeq \frac{C}{T-T_c} \tag{2.1}$$

に従う。今まで，平均場近似の結果は，高温の領域でのみ系の性質を正しく記述するものであり，近似的な相転移点 T_c 近傍の表式 (2.1) は，臨界現象を研究するのには全く役に立たないものと永らく信じられていた。新しいCAM理論では，発想法が逆転して，平均場近似の T_c での情報から，真の臨界現象が推定できる。すなわち，CAMの要点は，『平均場近似によって得られる古典的な振舞い（すなわち一位の発散）の係数（一位の極の留数）が近似の度合（す

なわち，近似的な相転移点 T_c がどれだけ真の相転移点 T_c^* に近いかという度合）をあげるにつれて系統的に（コヒーレントに）異常性を示す』という発見にある。[1] 今までのように，一つの平均場近似を作っただけでは信頼できる結論を導くことは出来ないが，いくつかの平均場近似を組織的に作り，『コヒーレント異常』の現れ方を調べれば，真の臨界的な振舞いがわかるというものである。このような系統的な平均場近似の列を『カノニカルな近似列』と呼ぶ。[1] この作り方に関しては次の報告を参照して頂きたい。[2-17]

もっと具体的にCAMを説明すると次のようになる。ある大きさのクラスターで平均場近似を行い，磁化率を求めると一般に

$$\chi_0(T) = \frac{\chi_{\mathrm{cl}}(T)}{1 - \mathscr{T}(T)} \tag{2.2}$$

の形になる。[1-6] 但し，$\chi_{\mathrm{cl}}(T)$ は，クラスターの磁化率，$\mathscr{T}(T)$ は平均場によるフィードバックの効果を表す。近似的な相転移点 T_c は $\mathscr{T}(T_c) = 1$ の解として求められ，磁化率は T_c の近傍で

$$\chi_0(T) \simeq \frac{\overline{\chi}(T_c)}{\varepsilon} \ ; \quad \varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c} \tag{2.3}$$

のような古典的な振舞いを示す。このとき，『平均場臨界係数』$\overline{\chi}(T_c)$ は，T_c が真の値 T_c^* に近づくにつれて，

$$\overline{\chi}(T_c) \to \infty \ ; \quad T_c \to T_c^* \tag{2.4}$$

となる。このコヒーレント異常を

$$\overline{\chi}(T_c) \sim \frac{1}{(T_c - T_c^*)^{\psi}} \tag{2.5}$$

のようにおいて，『コヒーレント異常指数 ψ』を適当に評価する。真の磁化率 $\chi_0^*(T)$ が

$$\chi_0^*(T) \sim \frac{1}{(T - T_c^*)^{\gamma}} \tag{2.6}$$

のような臨界的振舞いを示すとするとき，臨界指数 γ は

$$\gamma = 1 + \psi \tag{2.7}$$

によって求まることが，包絡線の理論，相関関数のスケーリング則，および，有限近似度スケーリング等を用いて導かれている。すなわち，CAM理論は，『手順の分離[21]』を行って，古典的な振舞いと，真の固有なゆらぎに起因する部分とを分離する。コヒーレント異常は，正しくこの固有なゆらぎの効果を表している。

さて，(2.5) のコヒーレント異常指数 ψ を求めるには，カノニカルな近似列から，T_c と $\overline{\chi}(T_c)$ の組をいくつか求め，それらを (2.5) でフィットさせればよい。例えば，T_c^* がわかっていれば，2つの平均場近似からでも ψ を大雑把に推定することができる。[1] 一般には，3つ以上の近似が必要である。[2−16] 近似の数は多いほど，また系統的であるほど，さらに，$\delta T_c \equiv (T_c - T_c^*)/T_c^*$ が1に比べて小さいほど，精度よく ψ が評価できる。

具体的な応用例については，この報告集の他の各論を参照して下さい。[2−17]

§ 3.　CAM 理論の拡張[9,10]

以上のように，古典的な近似列から，そのコヒーレント異常を調べて，真の相転移点と臨界指数が求められることが，いったんわかってしまえば，この考え方を拡張解釈して，いくらでも新しい『メタ近似法』が作れる。例えば，級数 CAM，[9] 連分数CAM，[10] 相関等式切断CAM，[17] グリーン関数切断CAM，[17]… があげられる。これらについても各論の報告を参照して頂きたい。

§ 4.　超有効場理論[18−22]

以上に見てきた通り，平均場近似が系統的に作れさえすれば，その系の相転移の真の様子が信頼できる精度で推定できることがわかった。それではどんな相転移に対しても平均場近似は作れるであろうか。それに答えるのが，これから説明する『超有効場理論』である。『超』をつけたのは，今まで平均場近似が作れそうにもないと思われていたようなエキゾティックな相転移でも有効場近似が作れることがわかったからである。

今までの平均場近似の作り方は，主として与えられたハミルトニアンの一部を平均的な相互作用で置きかえるものであった。超有効場理論では，有効場として，与えられた系の相互作用とは独立に一般的に，あるいは物理的に導入する。しかも，一点で定義された平均場ではなくある領域で始めて定義されるような有効場を導入する。このような有効場は，カイラルオーダーのようなトポロジカルな秩序等を議論するには特に有効である。このような問題やスピングラス等への応用[8] については各論の報告を参照して下さい。

§ 5.　一般化された平均場近似の新しい作り方

有効場をもっとも一般的に導入すれば，いつでも無限系を有限クラスターで厳密に表現できることはよく知られている。すなわち，着目している有限クラスター以外の自由度について正確にカノニカル平均をとれば，原理的には，厳密な有効場の表式が得られる。しかし，現実的

には，この手続きは，一次元系や，ベーテ格子以外では実行できない。そこで近似的な有効場理論に頼らなければならなくなる。その際，対称性を破る有効場と対称性を破らない有効場を分離して考えると便利である。しかも，それぞれに対応するクラスターの領域も一般には異なるものを考える。これは，今までにない新しい有効場近似の一般的な作り方である。例えば，オンサーガの厳収解を用いて，クラスター平均場近似を行って磁化率を求める方法がその典型的な例である。これは極めて精度のよい近似法の一つであることがわかった。[23]

§6. 結　び

以上説明したCAM理論と超有効場理論を組み合わせると，相転移の統一理論となる。二つ組み合わせた，言わば『超平均場理論』を軸にしていろいろな近似法を整理することが出来，それらの相互の関係をつけることが出来る。詳しくは，別に近々発表する。

参考文献

[1] Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 4205. Suzuki, M., Phys. Lett. **116 A** (1986) 375. and Quantum Field Theory (Proc. Int. Symp. Positano, Salerno, Italy, June 5-7, 1985) ed. Mancini, F. (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[2] Suzuki, M., Katori, M. and Hu, X., J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3092.

[3] Katori, M. and Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3113.

[4] Hu, X., Katori, M. and Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3865 .

[5] Hu, X. and Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 791 .

[6] Katori, M. and Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 807 .

[7] Suzuki, M., Prog. Theor. Phys. suppl. **87** (1986) 1.

[8] Suzuki, M., Phys. Lett. **127 A** (1988) 410 .

[9] Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 4221 .

[10] Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 1.

[11] Ito, N. and Suzuki, M., Int. J. Modern Phys. B, **vol. 2** (1988) 1.

[12] Oguchi, T. and Kitatani, H., J. Phys. Soc. **Jpn. 57** (1988) 3973.

[13] Takayasu, M. and Takayasu, H., Phys. Lett. **128 A** (1988) 45.
Takayasu, M. Takayasu, H. and Nakamura, T. Phys. Lett. **132 A** (1988) 429.

[14] Hu, X. and Suzuki, M., Physica **150 A** (1988) 310.

[15] Katori, M. and Suzuki, M. J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 3753.

[16] J. L. Monroe, Phys. Lett. 131A (1988) 427.

[17] Suzuki, M., J. Stat. Phys. 53 (1988) 483.

[18] Suzuki, M., J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 2310, および 683 (レター).

[19] Suzuki, M., the Proceeding of the 19th Yamada Conference on Ordering and Organization in Ionic Solutions, held at Kyoto, Nov. 9-12, 1987, ed Ise, N. (World Sci. Pub.).

[20] 鈴木増雄,『スピン系のエキゾティックな秩序 — 超有効場理論とコヒーレント異常法 —』(物性物理の新概念(培風館)の第一章).

[21] M. Suzuki, J. Stat. Phys. 49 (1989) 977.

[22] 鈴木増雄, 数理科学『相転移のルネサンス』特集号, 1988年7月号 (No.301).

[23] M. Suzuki, in preparation.

2. カノニカル・シリーズの作り方
—クラスター平均場近似と相関等式切断近似—

東大・理　香取真理, 鈴木増雄

§1. カノニカル・シリーズ[1)]

コヒーレント異常法(CAM)[1,2)]は, 古典近似を系統的に構成し, そこにみられる漸近的振舞いから真の臨界現象を調べる新手法である。従来, 近似理論は最小の手間で真の現象の核心を衝くことを目的としてきたが, ここでは以下に述べるような性質を持った一連の近似の列(カノニカル・シリーズと呼ぶ)を構成することが重要となる。本講演では, 2次相転移を起こす系に対する研究を報告する。

〔カノニカル・シリーズの特性〕

近似の列 $\{\mathscr{A}_n\}$ が次の3つの性質を持つときこれをカノニカル・シリーズと呼ぶ。[1,2)]

〔1〕 各近似において2次相転移が起こる。しかしながら臨界指数は古典値に固定される。例えば強磁性体の模型における零磁場帯磁率 $\chi_0^{(n)}$ は, セルフ・コンシステンシィ条件から決まる臨界点 $T_c^{(n)}$ において Curie-Weiss 則を示す。つまり, 帯磁率の臨界指数 γ は古典値 $\gamma_0 = 1$ に固定さ