

## ダブル・サイン・ゴールドン方程式のエネルギースペクトルについて

京大・工石森勇次

多自由度のハミルトン力学系である非線形波動系において、低波数のフーリエモードにエネルギーを与えたとき、どのように高波数のモードにエネルギーが分配されていくかを考える。非線形格子のような有限自由度系では、Fermi-Pasta-Ulamの問題等で古くから議論されてきたように、非可積分系の場合、非線形性が十分強ければ、系はエルゴード的になり各モードにエネルギーが等分配され、エネルギースペクトルは波数に依存しない分布を示す。可積分系の場合にはそのような分布はしない。一方、偏微分方程式で記述されるような連続無限自由度の系では、いくらでも高い波数が存在するのでエネルギーが各モードに等しく分配されることはなく、一般には非可積分系においてもエルゴード性は意味のないことである。それでは、連続無限自由度系では可積分と非可積分でエネルギースペクトルに何か違いがあるのだろうか？

本研究では連続無限自由度の非線形波動系としてダブル・サイン・ゴールドン方程式

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \operatorname{sech}^2 R \sin \phi + (1/2) \tanh^2 R \sin 2\phi = 0 \quad (0 < R < \infty)$$

を考えた。前回の研究会で報告したように、この方程式はソリトンのダイナミックスと保存量との関係から  $R=0$ ,  $R=\infty$  のとき可積分であり  $R$  が中間的値をとるときは非可積分である。可積分系と非可積分系でエネルギースペクトルにどのような違いがあるのか、方程式を数値的に解くことによって調べた。

初期値として以下のように1つの低波数のモードにエネルギーを与えた。

$$\phi(x, t=0) = 0, \quad \phi_t(x, t=0) = A \sin(2\pi x/L)$$

$L$  は系の長さで  $L=50$  とし、周期的境界条件をとった。フーリエモードは

$$A_n(t) = \int_0^L \phi(x, t) \exp[-(2\pi n x/L)] dx$$

で計算されるが、このとき系の運動エネルギーは

$$\int_0^L (1/2) \phi_t^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L |A_n(t)|^2$$

と書かれる。ここではスペクトルとして運動エネルギーのスペクトル  $K_n$  を考え

た。エネルギースペクトルの広がり の程度を表す量としてLivi等によって導入されたスペクトル・エントロピー

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \ln p_n(t), \quad p_n(t) = K_n(t) / \sum_{n=0}^{\infty} K_n(t)$$

を計算し、また適当な時間中で平均したスペクトル  $K_n(t)$  に対するエントロピーの振舞いも調べた。実験はエネルギーの大きさ  $E$  が

$$\epsilon = E/E_s = 0.7, 1.5, 3, 6, 12, 24, \quad E_s: \text{ソリトンの静止エネルギー}$$

の場合について行なった。

可積分 ( $R=0$ ) の場合、エネルギーの高低にかかわらず誘導現象は起こらず正のリアプノフ数は存在しなかった。図1および図2にそれぞれソリトンが発生しないような低エネルギー ( $\epsilon=3$ ) の場合とソリトンが発生するような高エネルギー ( $\epsilon=12$ ) の場合のスペクトルエントロピー  $H(t)$  の変動の様子が示されている。低エネルギーでは再起現象を規則正しく繰り返すだけである。高エネルギーではソリトンが発生し安定に伝播するが  $H(t)$  は一見不規則に変動し再起までの時間が比較的長くなる。図3に  $t=0$  から  $t$  まで時間平均したスペクトルに対するエントロピーの変動が示されている。  $t=400$  を過ぎたあたりから一定になり、単調に増大することはない。図4に  $t=0$  から  $t=800$  まで時間平均したスペクトルが示されている。エネルギーの高低にかかわらず波数の関数として指数型の分布をしている。

非可積分 ( $R=0.4$ ) の場合、低エネルギー ( $\epsilon=0.7, 1.5$ ) では可積分のときと同様に規則正しい運動を繰り返すだけである。  $\epsilon=3$  では図5に示されているように  $t=800$  付近で誘導現象が見られ初期の状態にもどることはない。ソリトンの発生するエネルギー ( $\epsilon=12$ ) では誘導時間はほとんど0であり、図6に示されているように平均的には単調にエントロピーは増大する。図7に  $t=0$  から  $t$  まで時間平均したスペクトルに対するエントロピーの変動がいくつかの  $\epsilon$  にたいして示されている。誘導時間の後、ほぼ

$$H \sim a \ln t$$

で増大しているのがわかる。すなわち、励起されるフーリエモードの数  $W$  は

$$W \sim t^a$$

で増大している。この傾向は、ある時刻でのスペクトルを適当な時間中で平均したエネルギーで定義しても同じであった。ただし、長時間後 ( $t \sim 10000$ ) にはエントロピーはほとんど増加しなくなった。図8にソリトンの軌跡が示されているが

安定に伝播せず不規則に運動しているのがわかる。図9は800時間ごとに時間平均したときのスペクトルが示されている。高波数の領域は常に指数型の分布

$$K_n \sim \exp(-\beta n)$$

をしているが指数 $\beta$ は適当な時間領域でほぼ

$$\beta \sim t^{-\gamma}$$

の関数形で小さくなっている。一方、低波数領域には時間が経過するつれ波数によらない領域即ちエネルギーが等分配される領域が現われる。各 $\epsilon$ に対する $\alpha$ と $\gamma$ を以下に示す。

$\epsilon$	$\alpha$	$\gamma$
3.0	0.29	0.15
6.0	0.25	0.14
12.0	0.17	0.10

もしもすべての波数領域でスペクトルが指数型の分布をしているとすると

$$H(t) \sim -\ln \beta, \quad \beta \ll 1$$

となるので  $\alpha \sim \gamma$  となるが実際には低波数領域に等分配領域ができるので $\alpha$ と $\gamma$ は異なった値をとる。即ち単純に $\beta \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ となることが非可積分系の特徴ではない。

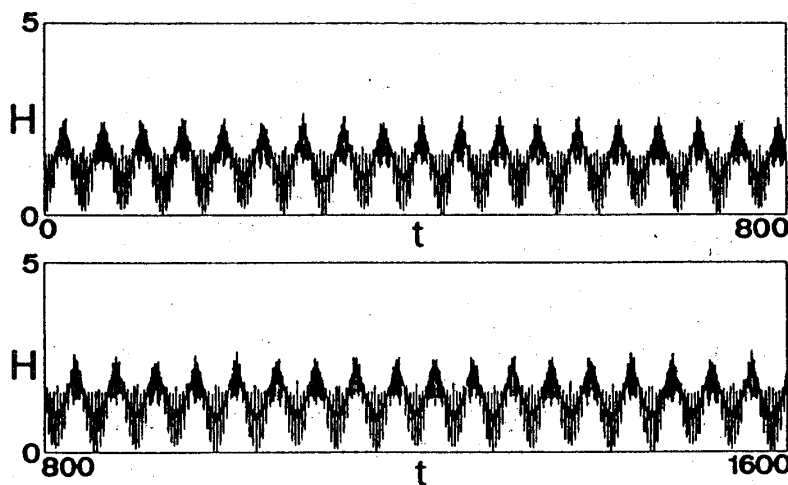


図1 スペクトル・エントロピーの変動 ( $R=0, \epsilon=3$ )。

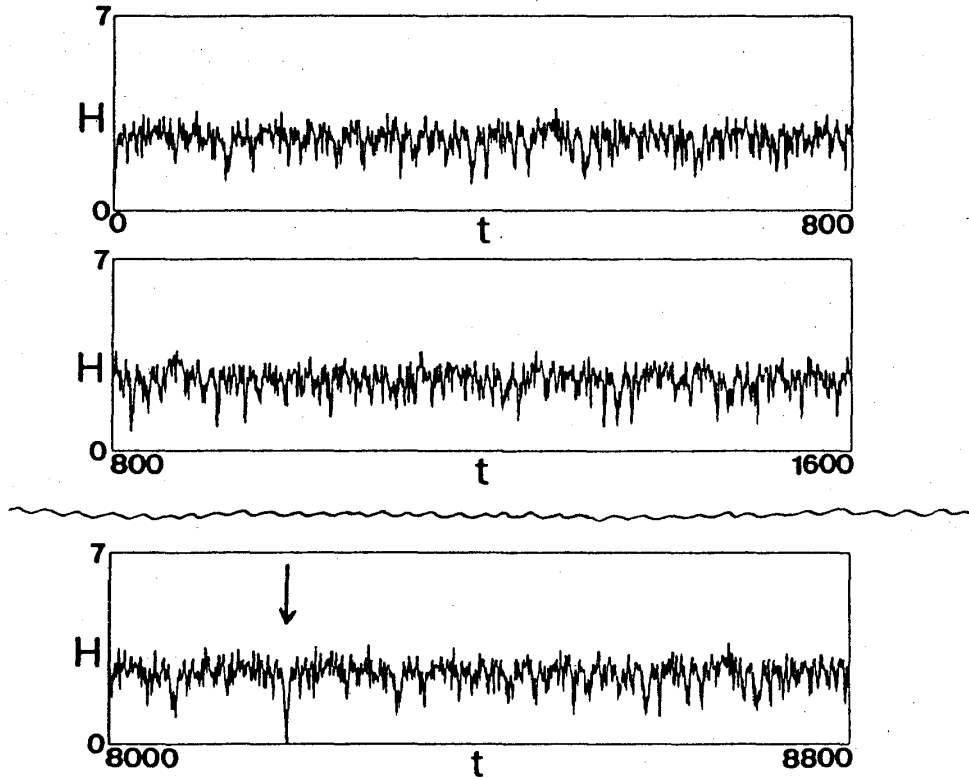


図 2 スペクトル・エントロピーの変動 ( $R=0, \epsilon=12$ )。矢印は再起時刻を表している。

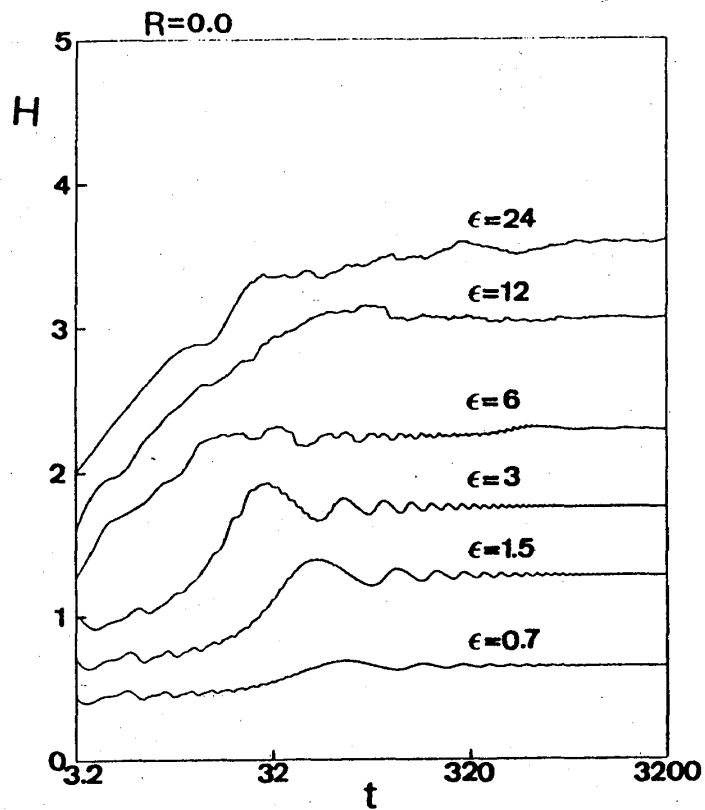


図 3 時間平均されたスペクトル・エントロピーの変動 ( $R=0$ )。

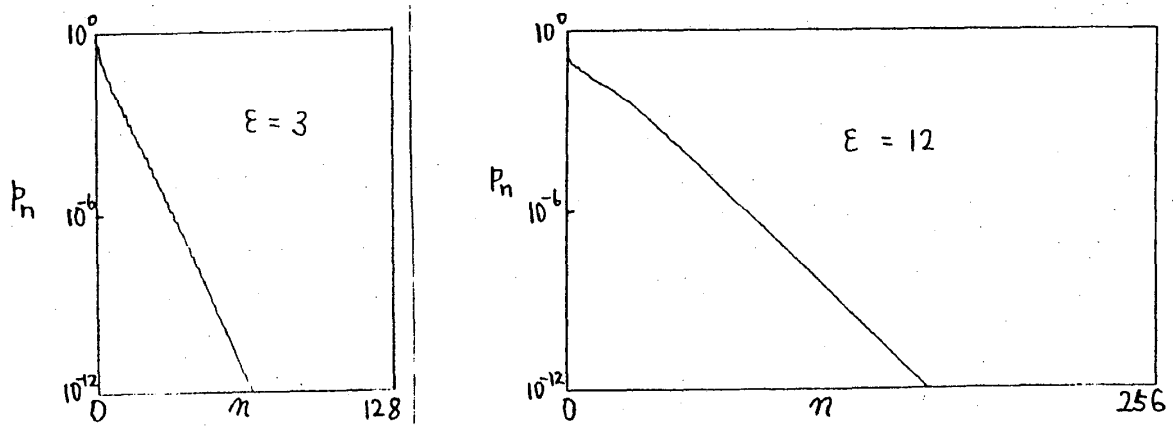


図4 エネルギー・スペクトル ( $R=0, \epsilon=3, 12$ )

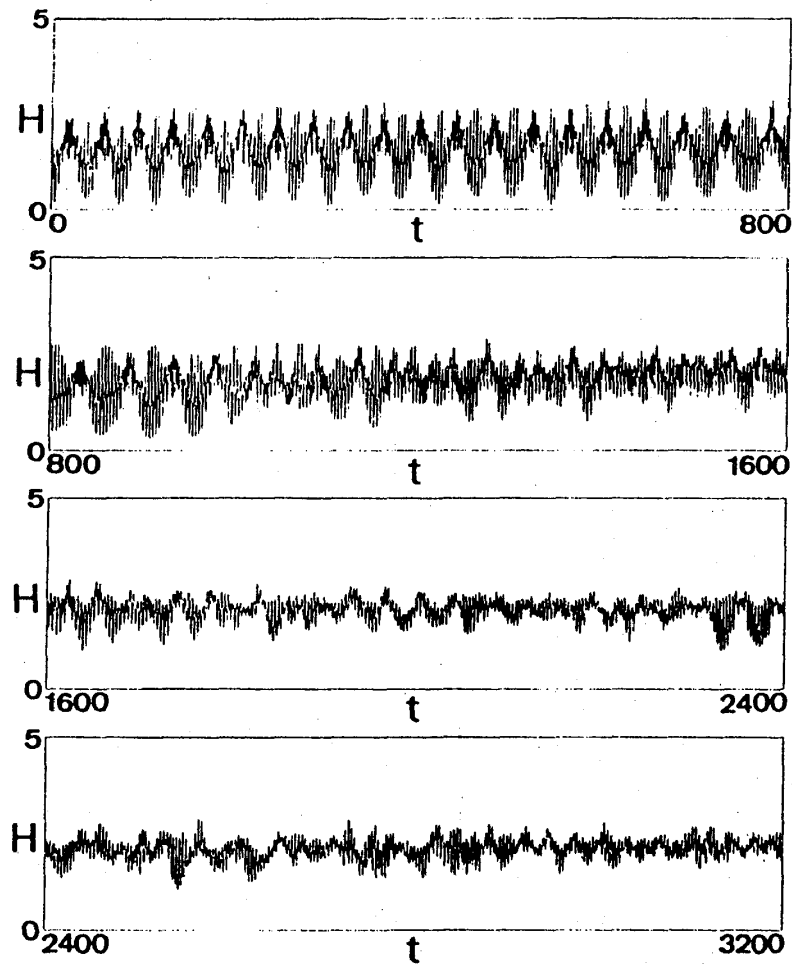


図5 スペクトル・エントロピーの変動 ( $R=0.4, \epsilon=3$ )。

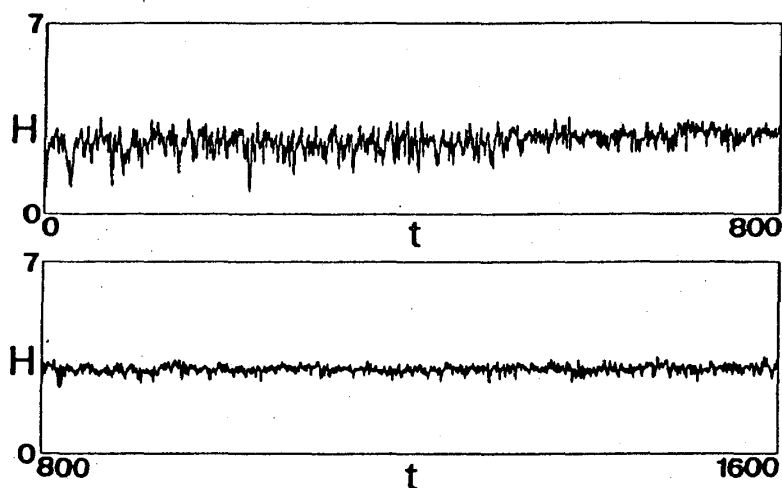
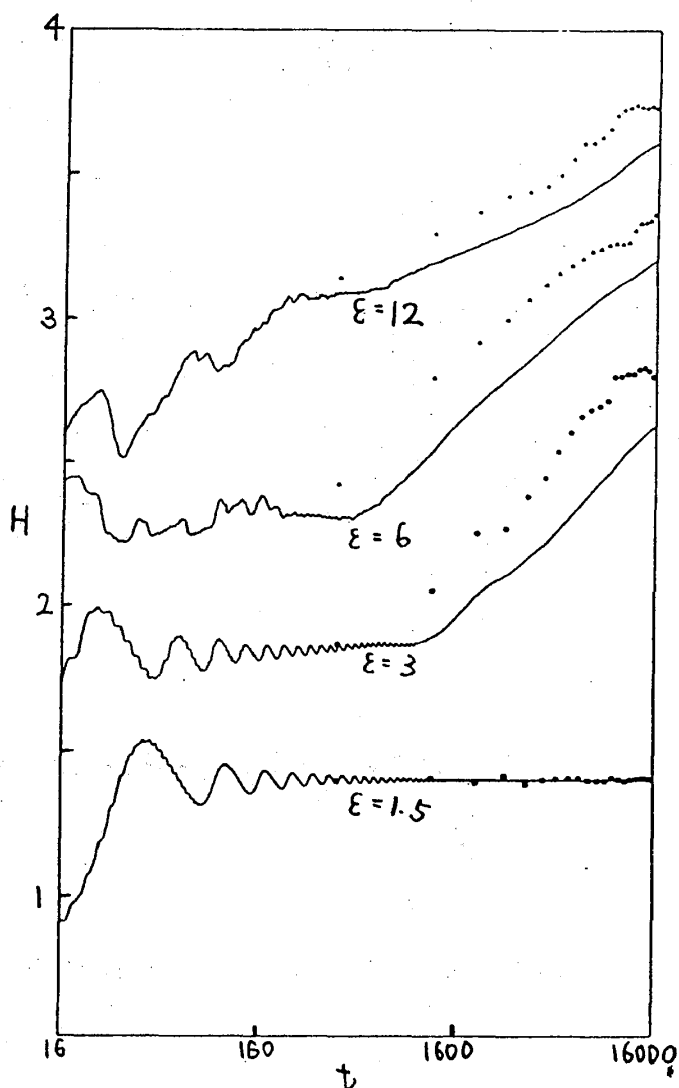


図6 スペクトル・エントロピーの変動 ( $R=0.4, \epsilon=12$ )。

図7 時間平均された  
スペクトル・エ  
ントロピーの変  
動 ( $R=0.4$ )。マ  
ークされた点は  
 $t=800$  おきに時  
間平均したスペ  
クトルに対する  
エントロピーを  
示している。



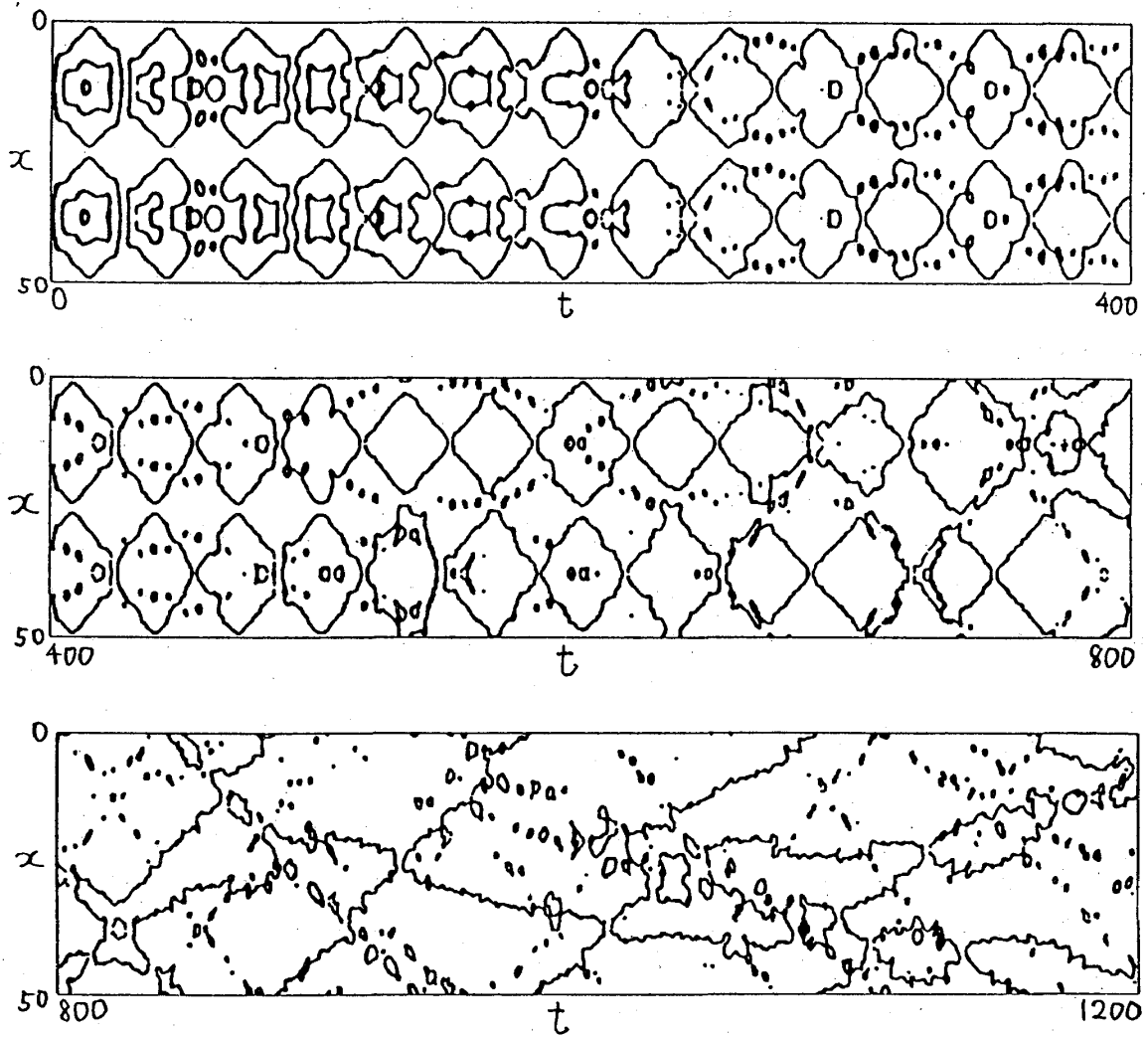


図8 ソリトンの軌跡 ( $R=0.4, \epsilon=12$ )。

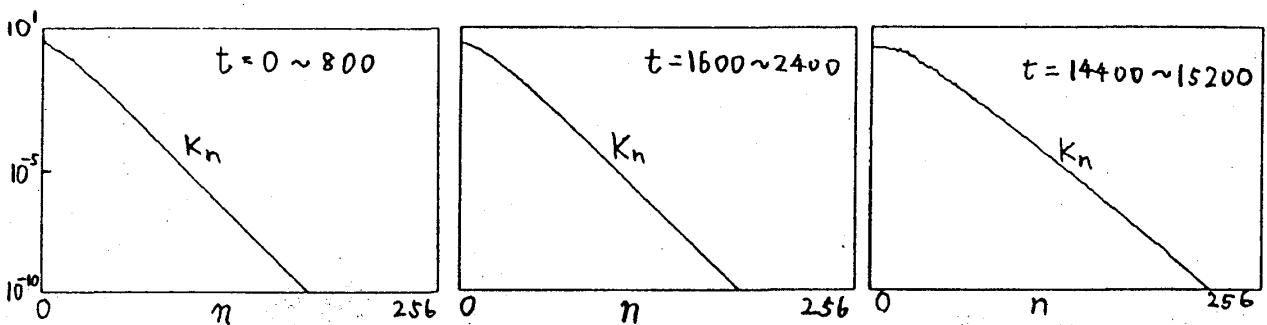


図9 エネルギー・スペクトル ( $R=0.4, \epsilon=12$ )。