間欠型カオスの統計力学的定式化

静大・教養　佐藤　信一
名大・工　本田　勝也

力学系のマルチフラクタル性が注目されて以来、その定式化が熱力学的定式化と対応することは数多くの論文が述べている。我々は、一連の熱力学形式に対する考察に基づいて単純化した間欠型カオスのモデルに統計力学的定式化を適用し、マルチフラクタル・スペクトラムを議論した。

まず、統計力学的議論を展開するために、間欠型カオスを２状態のランダム変数の確率過程に単純化する。２状態＋１、－１をとるランダム変数をs_iとし、部分列$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$が観測される確率を$p(s_1, \cdots, s_n)$とする。＋１が時系列におけるバースト状態を表し、－１が層流的状態を表す。また、ｉ番目の状態s_iを知ったときに部分列$\{s_{i+1}, \cdots, s_{i+n}\}$が生じる条件付き確率を$p(s_i \mid s_{i+1}, \cdots, s_{i+n})$とする。ここで、次の式で表される間欠型カオスのモデルを考える。

$$p(1 \mid -1) = a, \qquad p(1 \mid 1) = b \tag{1.a}$$

$$p(-1 \mid -1, \cdots, -1, 1) = c\, j^{-\nu} \qquad (j=1,2,\cdots) \tag{1.b}$$

(1.b)式は、－１の次にｊ－１個の －１が続き、ｊ番目に１が来る条件付き確率を表す。確率の保存則から$a+b=1$、$c=\{\zeta(\nu)\}^{-1}$である（ただし、ζはRiemannのゼータ関数）。　このモデルに対して、更に次の対応を考える：時間軸を１次元空間と見なし、＋１→粒子占有状態、－１→空状態を対応させる。これにより、我々は間欠型カオスと１次元格子気体との対応を得た事になる。以下では、すべて格子気体との対応に基づいて述べることにする。距離ｊだけ離れた隣合う粒子間の相互作用エネルギー$U(j)$は(1.a)、(1.b)式より

$$\begin{aligned} U(j) &= -\ln b && \text{for } j=1 \\ &= -\ln a - \ln c + \ln(j-1) && \text{for } j \geq 2 \end{aligned} \tag{2}$$

となる。逆温度をq（ただし、$-\infty \leq q \leq \infty$）とし、サイズ$n$の格子系で$m$個の粒子を含む系の分配関数を$Z_{n,m}(q)$とする。そして、次の母関数$\Xi$を導入する。

$$\Xi(P,q,\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} e^{-Pn} e^{\mu m} Z_{n,m}(q) \tag{3}$$

ここでPは圧力に、μはケミカル・ポテンシャルに対応する。 Ξを関数U(j)を用いて書き下すと

$$\Xi(P,q,\mu)=1/\{1-\Phi(P,q)\} \tag{4}$$

$$\Phi(P,q)=\sum_{j=1}^{\infty} \exp\{-Pj-qU(j)\} \tag{5}$$

となる。後は統計力学の処方箋に従って、サイト当りのヘルムホルツ自由エネルギー f(q)を計算すると熱力学的極限において

$$f(q)=-\overline{P}(q) \tag{6}$$

ただし、

$$\Phi(\overline{P},q)=1 \tag{7}$$

が容易に示される。もともとの間欠型カオスの時系列との対応を考えると $f(q)=(q-1)K_q$ が得られるので q 次Renyiエントロピー K_q が代数方程式(7)の解として求められる。

(7)式に対する考察から、 $q=1$ が相転移の臨界点であり、臨界指数のν依存性から相転移のタイプが三つに分類されることが分かる (Case I $=\nu>3$, Case II $=2<\nu<3$, Case III $=1<\nu<2$: Case IとCase IIが1次相転移であり、Case IIIが2次相転移である)。実際に観測する物理量はq＝1における値であり、それがちょうど臨界点に対応している事は間欠型カオスの局所軌道拡大率の大きなゆらぎ、過渡的カオスの存在が相転移の臨界性に由来していることを示している。