

局所拡大率の n -sum の $\log n$ 依存性 I (コメント)

堀田 武彦 (九大・理・物理)

黄金比の回転数をもつ散逸系、保存系の臨界トラス上の軌道の運動を特徴づける試みについて、数値実験の結果を紹介した。

散逸系における黄金トラスの崩壊によるカオス発生のモデルとしては、サイン・サークル・マップ

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega - (2\pi/K) \sin 2\pi\theta_i \pmod{1} \quad (1)$$

($K=1, \Omega=0.606610\dots$)、および、散逸のあるスタンダード・マップ

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + \Omega + r_{i+1} \pmod{1} \\ r_{i+1} &= br_i - (K/2\pi) \sin 2\pi\theta_i \end{aligned} \quad (2)$$

($b=0.3, K=0.978837\dots, \Omega=0.611753\dots$) を用いた。また、保存系における黄金 KAM トラスの崩壊を示すモデルとしては、スタンダード・マップ

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + r_{i+1} \pmod{1} \\ r_{i+1} &= r_i - (K/2\pi) \sin 2\pi\theta_i \end{aligned} \quad (3)$$

($K=0.9971635\dots$) を用いた。

図 1、2、3 はそれぞれ写像 (1)、(2)、(3) に対して時系列

$$\beta_n(X_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(X_i) / \log n \quad (4)$$

をプロットしたものである。ここで、 $\lambda_1(X_i)$ はトラス上の点 X_i におけるトラスに沿った

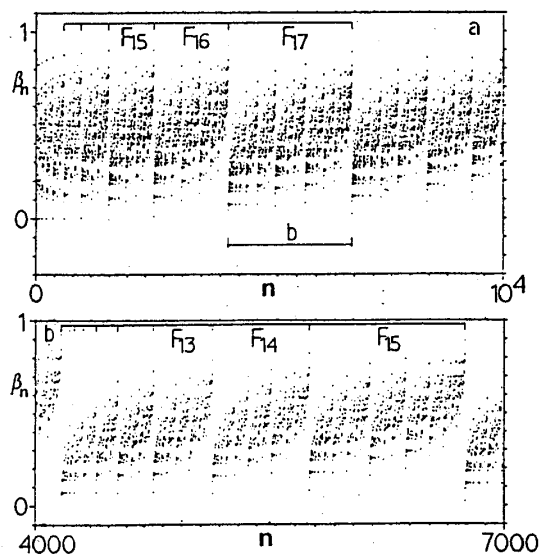


図 1 (1) の $\beta_n(X_0)$ 、 $X_0 = \theta_0 = 0.105518\dots$

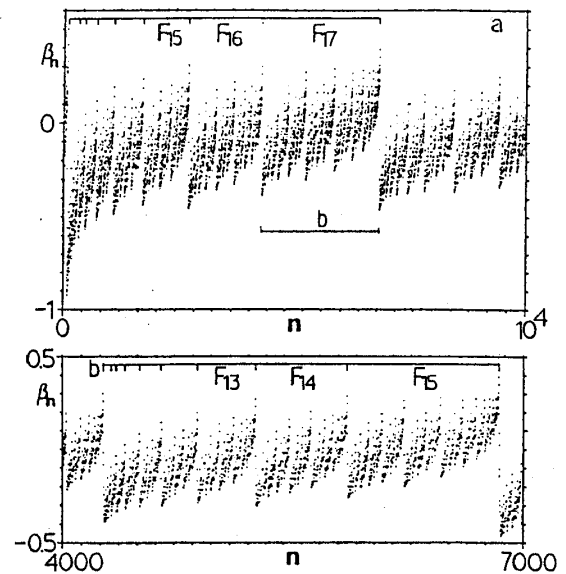


図 2 (2) の $\beta_n(X_0)$ 、 $X_0 = (\theta_0, r_0) = (0.087832\dots, 0.013425\dots)$

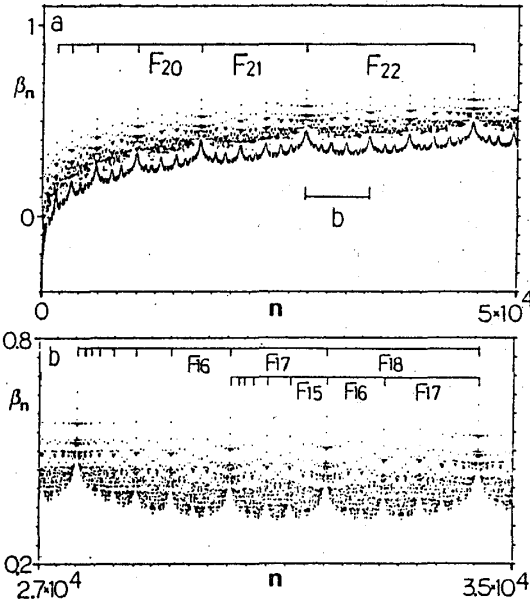


図3 (3) の $\beta_n(X_0)$ 、 $X_0 = (\theta_0, r_0) = (0.630573\dots, 0.564140\dots)$

方向の局所軌道拡大率である。 $\beta_n(X_0)$ は収束も発散もせず、フィボナッチ数によって指定されるような自己相似な入れ子構造を持つことがわかる。理論的には、 $\beta_n(X_0) \approx 1/\alpha(\theta_0, 1/n) - 1/\alpha(\theta_n, 1/n)$ のように、自然不変測度 m の特異点指数 α と結び付くことが期待される。ここで $\alpha(\theta, \Delta m)$ は $m\{X_0 = (\theta_0, r_0) : \theta \in [\theta_0, \theta_0 + \Delta m^{1/\alpha}]\} = \Delta m$ によって、定義する。

図4、5、6は、それぞれ図1、2、3のパワースペクトルを示したものであり、自己相似性を反映し、黄金比 $(\sqrt{5}-1)/2$ で $\omega=0$ に集積するライン・スペクトルを持つ。

図7は、 $\psi_\beta(\beta) = -(1/\log n) \log \{P(\beta; n) / P(0; n)\}$ を示したものである。ここで $P(\beta; n) d\beta = m\{X_0 : \beta_n(X_0) \in (\beta, \beta + d\beta)\}$ である。(a)、(b)の場合、 $\psi_\beta(\beta)$ は線形部分を持ち、そのスロープは、理論的な予想 $s = -\alpha_{\max}/2 = -0.949$ と合う。ここで、 $\alpha_{\max} = 1.898$ は自然不変測度の特異点指数 α の最大値である。(c)の場合 $\psi_\beta(-\beta) = \psi_\beta(\beta)$ が、写像の時間反転に対する対称性から期待される。

このように、(4)の β によって臨界トーラス上の運動の特徴が引き出せることがわかる。

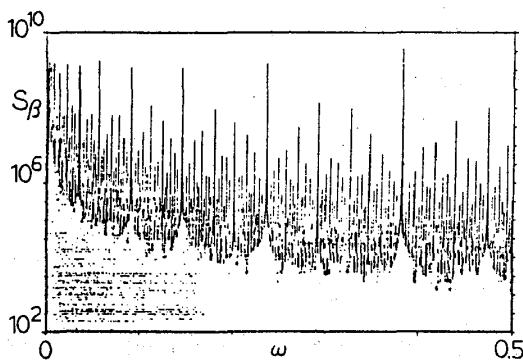


図4 図1の $\beta_n(X_0)$ のパワースペクトル

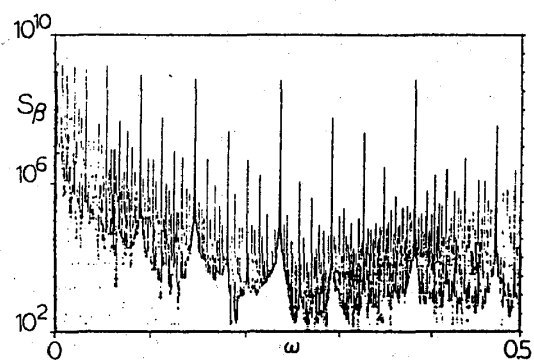


図5 図2の $\beta_n(X_0)$ のパワースペクトル

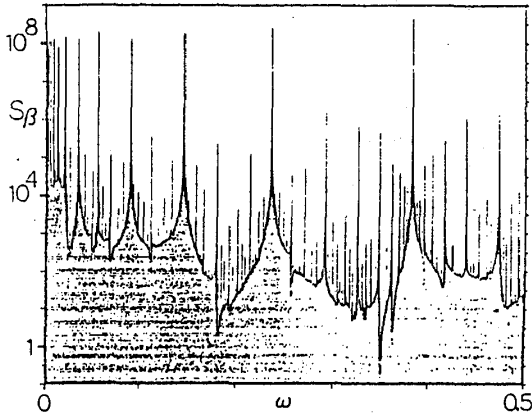


図6 図3の $\beta_n(X_0)$ のパワースペクトル

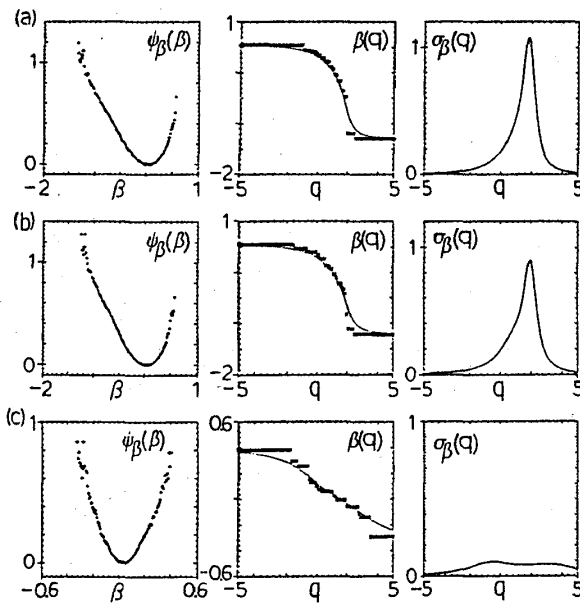


図7 $\psi_\beta(\beta)$ 、
 $\beta(q) = \int d\beta \beta n^{-(q-1)} \beta P(\beta; n)$ 、
 $\sigma_\beta(q) = -d\beta(q)/dq$ 。
 (a) . 写像(1) $n=8000$, $N=3 \times 10^6$
 N は自然不変測度 m の計算に用いた軌道の長さ。
 $\psi_\beta(\beta)$ はスロープ -0.83 の線形部分を持ち、
 $\sigma_\beta(q)$ は $q=1.83$ にピークを持つ。
 (b) . 写像(2) $n=8000$, $N=3 \times 10^6$ 。
 $\psi_\beta(\beta)$ はスロープ -0.95 の線形部分を持ち、
 $\sigma_\beta(q)$ は $q=1.95$ にピークを持つ。
 (c) . 写像(3) $n=12000$, $N=10^5$ 。
 $\psi_\beta(\beta)$ は線形部分を持たず、
 $\sigma_\beta(q)$ は鋭いピークを持たない。

参考文献

- トーラスの崩壊に関して
 S.J.Shenker, Physica 5 D (1982), 405,
 S.J.Ostlund, D. Rand, J. Sethna and E. Siggia, Physica 8 D (1983), 303,
 J.C.Antranz and H. Mori, Physica 16 D (1985), 184,
 T. Bohr, P. Bak and M.H.Jensen, Phys. Rev. A 30 (1984), 1970,
 M.H.Jensen and I. Procaccia, Phys. Rev. A 32 (1985), 1225,
 J.M.Green, J. Math. Phys. 20 (1979), 1183.
- $\beta_n(X_0)$ に関連して
 G. Anania and A. Politi, プレプリント(1988),
 T. Schneider, A. Politi and D. Würtz, Z. Phys. B 66 (1987), 469.
- 全般的には、森 肇「アトラクターの特異な局所構造と q -相転移」(基研研究会 1988) を参照下さい。