条件つき q − 次エントロピーの導入とその応用

鹿大・理　井上政義，藤坂博一

Renyi は確率の q 乗を用いてエントロピーを一般化した。この Renyi エントロピーの有用性はフラクタルやカオスの研究分野では著しいものがある。我々は Renyiと同様にして「条件つきエントロピー」を一般化し，それを種々の問題に応用する。

まず２つの排反事象系$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$を考える。

$$\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_N\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_M\}. \tag{2}$$

$\mathcal{A}$の事象が A_j である確率を $P(j)$ とし，このとき$\mathcal{B}$の事象が B_i である条件つき確率を $p_j(i)$ であるとする。このとき，条件つきエントロピーは次式で定義される。

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = -\sum_{ij} P(j)\, p_j(i) \ln p_j(i). \tag{3}$$

この条件つきエントロピーの性質と意味は以下のとうりである。

a） $H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = H(\mathcal{A}^\vee\mathcal{B}) - H(\mathcal{A})$　(4)

ここで $H(\mathcal{A}^\vee\mathcal{B})$ は合成系のエントロピーであり，$H(\mathcal{A})$ は$\mathcal{A}$系のエントロピーである。上式は$\mathcal{A}$のもつ情報を知った上での，$\mathcal{B}$ の不確定性を表している。

b） $0 \leqq H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \leqq H(\mathcal{B})$　(5)

もし，$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$が独立ならば，

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = H(\mathcal{B}). \tag{6}$$

このとき，$\mathcal{A}$ の情報は$\mathcal{B}$の不確定性を減少させない。

c） $H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = 0$　(7)

上式が成立するときは，$\mathcal{A}$を知れば$\mathcal{B}$ の全てがわかる。

d) $D(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) + H(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ (8)

上式の $D(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は系 $\mathcal{A}$ と系 $\mathcal{B}$ の距離を表している。

以上が従来の条件つきエントロピーのまとめである。さて，このエントロピーを一般化した q-次条件つきエントロピー H_q は次式で導入される。

$$H_q = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{ij} P(j) p_j^q(i) \tag{9}$$

パラメータ q の値を 1 に選ぶと従来の条件つきエントロピーが得られる。すなわち，

$$H_{q=1} = H(\mathcal{B}|\mathcal{A}). \tag{10}$$

また，系 $\mathcal{B}$ に含まれる事象の総数は M であるから，

$$H_{q=0} = \ln M \tag{11}$$

となる。

簡単な応用例をまず示そう。考える系は，

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= (A_1 = \uparrow, \quad A_2 = \downarrow) \\ \mathcal{B} &= (B_1 = \uparrow, \quad B_2 = \downarrow) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

で表せるとする。この系の H_q は，

$$\begin{aligned} H_q = \frac{1}{1-q} \ln [&P(1) p_1(1)^q + P(1) p_1(2)^q \\ &+ P(2) p_2(1)^q + P(2) p_2(2)^q], \end{aligned} \tag{13}$$

と求まる。ただし規格化条件より

$$\left.\begin{aligned} &P(1) + P(2) = 1, \quad p_1(1) + p_1(2) = 1, \\ &p_2(1) + p_2(2) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

上下が対称な場合は，$p_1(2) = p_2(2) = \kappa$，$p_1(2) = p_2(1) = 1 - \kappa$ と表すことができるので，このとき H_q は次式の様に簡単になる。

$$H_q = \frac{1}{1-q} \ln [\kappa^q + (1-\kappa)^q]. \tag{15}$$

上式より，最大エントロピーは

$$H_{q=-\infty}=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{\kappa}\ ; & 0\leq\kappa<\dfrac{1}{2}\,,\\[2ex] \ln\dfrac{1}{1-\kappa}\ ; & \dfrac{1}{2}\leq\kappa<1\,,\end{cases}\tag{16}$$

また最小エントロピーは,

$$H_{q=\infty}=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{1-\kappa}\ ; & 0\leq\kappa<\dfrac{1}{2}\,,\\[2ex] \ln\dfrac{1}{\kappa}\ ; & \dfrac{1}{2}\leq\kappa<1\,,\end{cases}\tag{17}$$

で与えられる。従来の条件つきエントロピー $H(\mathscr{B}|\mathscr{A})$ は

$$H(\mathscr{B}|\mathscr{A})=H_{q=1}=\kappa\ln\frac{1}{\kappa}+(1-\kappa)\ln\frac{1}{1-\kappa}\ ,\tag{18}$$

となる。また(11)式はこの例では,

$$H_{q=0}=\ln 2.\tag{19}$$

一般に，条件つき q-次エントロピー H_q は相似構造関数 λ_q と深い関係がある。この応用例の場合は次の事が見出された。

一次元マップ $f(x)=x/p\,;(0\leq x\leq p)\,\mathrm{or}\,(x-p)/(1-x)\,;(p<x<1)$ の局所リヤプノフ指数の相似構造関数 λ_q は

$$\lambda_q=\frac{1}{q}\ln[p^{1-q}+(1-p)^{1-q}]\tag{20}$$

と求まっている。これより，(15)式の H_q は，(20)式の λ_q と同一の数学的構造をもっていることがわかる。

条件つき q-次エントロピー H_q の具体的な応用として，我々は結合系の同調の様子を H_q を用いて調べている。

確率空間の分割数を増していくと H_q は増大する。この増大の速度より，Renyi エントロピーの場合と同様の方法で，特異点スペクトルを導入することができる。