

乱流境界層における間欠性のマルチフラクタル解析

辻 義之、本田勝也、中村育雄（名大工）

佐藤信一（静岡大）

§ 1 はじめに

自然現象の中には間欠的に事象が生起する現象を多数認めることができる。従来からこれらの現象を解析するため、事象間隔の確率密度関数やパワースペクトラムによる解析がなされてきた。しかし、最近これらの間欠的現象をカオスの動力学的な立場からとらえる試みが報告されている(1)。これらはマルチフラクタル理論(2)(3)を応用し、現象を動力学的にとらえそのゆらぎを計算することによってより詳細な情報を得ようとするものである。また、この理論を統計力学的に定式化し、動力学的な指数のゆらぎやオーダーパラメータが厳密に導けることが報告された(4)。本研究では、乱流境界層外縁付近で観測される乱流域と非乱流域の間欠的な分布を $h-\gamma$ スペクトラム理論(1)(4)により解析することを目的にする。

既に実験的に調べられているように間欠的乱流場における乱流域の分布はフラクタル的な分布を示し、そのフラクタル次元は乱流の種類によらずにほぼ一定になることが報告されている(5)。とすれば、乱流境界層外縁付近における乱流域の分布を捕らえた $h-\gamma$ スペクトラムの形は乱流の種類によらず普遍性を持つことが期待される。

§ 2 $h-\gamma$ スペクトラム

実験データ解析の手段に密接に関係する一次元格子ガス・モデルを例にとり $h-\gamma$ スペクトラム理論の簡単な説明を行うことにする。一次元上に並んだ記号列 $\{S_i\}$ に対し以下の二つの状態が取れるものとする。

$$S_i = \begin{cases} 1: & \text{Turbulent} \\ 0: & \text{Non Turbulent} \end{cases}$$

長さ n の記号列 $\{S_i\}$ に対して n 番目で初めて乱流状態が出現する確率を $P(S_1, S_2, \dots, S_n)$ と書くことにする。

記号列 $\{S_i\}$ に対して分配関数が定義できる。

$$Z_n(q) = \sum_{S_i} \exp[-q \ln P(S_1, S_2, \dots, S_n)^{-1}]$$

このとき Σ は可能な記号列 $\{S_i\}$ すべてに対して取るものとする。統計力学との対応を考えると q は温度の逆数（しかし $-\infty \leq q \leq +\infty$ ）に対応しており、また $\ln P(S_1, S_2, \dots, S_n)^{-1}$ はハミルトニアンに対応する。 n が十分大きな極限では $Z_n(q)$ は以下のようにふるまう (1) (4)。

$$Z_n(q) \sim \exp(-f(q) * n)$$

$$f(q) = (q - 1) * K_q$$

ここで K_q はレニーエントロピをあらわし、特に $q=1$ の時はコルモゴロフ・エントロピをあらわす (6)。記号列 $\{S_i\}$ を動力学的な立場からみたときのゆらぎを評価するために局所の情報量生成割合 γ を、 n ステップの $\{S_i\}$ に対して以下のように定義する (1) (4)。

$$P(S_1, S_2, \dots, S_n) \sim \exp(-\gamma n)$$

この時、指数 γ をもつ記号列 $\{S_i\}$ の個数は $\exp\{h(\gamma)\}$ の割合で増加していく (1)。マルチフラクタル理論と同様にルジャンドル変換を用いることによって $h-\gamma$ スペクトラムが導かれる。

$$\gamma(q) = \frac{d}{dq} f(q)$$

$$h(q) = q\gamma(q) - f(q)$$

次に、オーダーパラメータ $\Psi(q)$ を求めることを考える。粒子数 n 個に対して m 個の乱流状態を示す分配関数 $Z_{n,m}(q)$ を用いて $Z_n(q)$ は以下のようにあらわせる。

$$Z_n(q) = \sum_{m=0}^n Z_{n,m}(q)$$

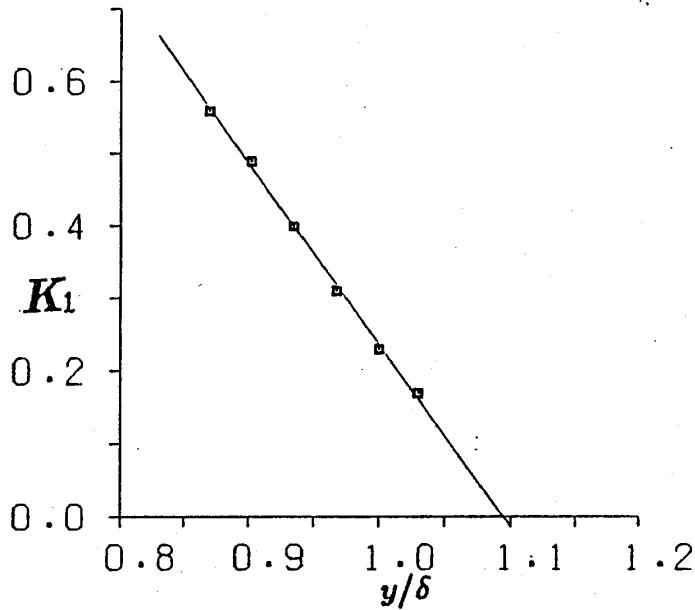
$Z_n(q)$ を計算するため母関数 $\Xi(q, P, \mu)$ を導入する。

$$\Xi(q, P, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n e^{-Pn} e^{\mu m} Z_{n,m}(q)$$

P は格子ガス・モデルにおいて一次元の圧力に比例し、 μ は化学ポテンシャルに対応する。ここで、物理量 Q の大きなカノニカル集合平均 (Grand Canonical Ensemble Average) を以下のように定義する。

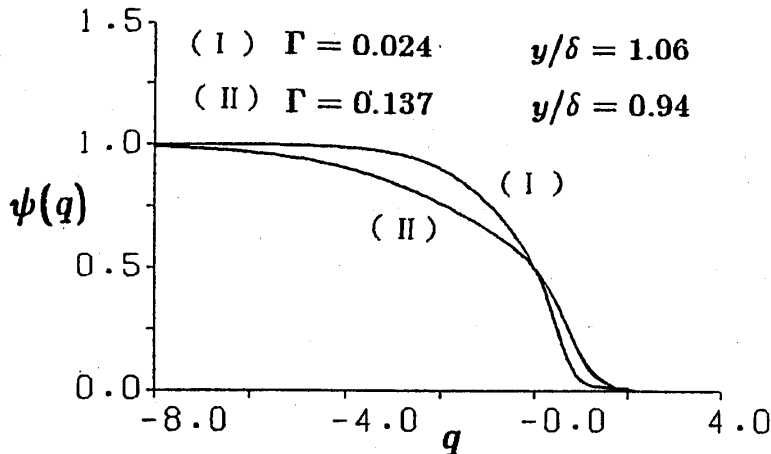
この直線に接し、 $h = K_1$ (コルモゴロフエントロピー) である。

図(4-2)は乱流境界層外縁付近で K_1 の値を計算した結果を示す。壁面に近づく



(図4-2) コルモゴロフ・エントロピーの y/δ に対する変化

計算した結果を示す。従来解析では確率の小さな部分の現象はあまり重要視されていなかった。しかし、現象の解明には確率の小さな部分の情報も十分に活用



(図4-3) オーダーパラメータ

する必要がある。これら確率の小さな領域を浮き彫りにするのに q は重要な役割を演ずる。つまり、分配関数を計算する時点で考えると q が小さくなれば確率の小さな部分が強調され、従来とらえにくい現象を明確にとらえることができる。この様子は $\Psi(q)$ の変化に現れており、 y/δ の値が小さいほど $\Psi(q)$ の変化はゆるやかである。なお、 $\Gamma = \Psi(1)$ である。

§ 5 終わりに

乱流境界層外縁における間欠的乱流場を $h-\gamma$ スペクトラムにより明確にとらえることができた。その結果、境界層外縁ほど γ の変域は増加する。これは境界層外縁ほど比較的長い乱流状態が局在している割合が大きいことをあらわしている。

$$\langle Q \rangle = \{E(q, P, \mu)\}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n e^{-Pn} e^{\mu m} Q Z_{n,m}(q)$$

粒子数 n 個のうち m 個が乱流状態を表すとき、その乱流状態の粒子密度をオーダーパラメータとして導入する。

$$\psi(q) = \frac{\langle m \rangle}{\langle n \rangle}$$

$q=1$ のとき、 $\Psi(q)$ は乱流状態の粒子数の割合を示し、これは間欠係数 Γ に一致する。実際には $Z_n(q)$ を計算する必要があるがこの理論的な説明は参考文献(4)に譲るとして、本研究では実験結果から $P(S_1, S_2, \dots, S_n)$ を直接求め $h-\gamma$ スペクトラム及びオーダーパラメータ $\Psi(q)$ を計算することとする。

§ 3 乱流 - 非乱流域の判定

乱流境界層外縁付近の現象は、大変興味深く過去に数々の研究がなされてきた。界面付近の構造を解明するためレイノルズ応力の測定や乱流領域、非乱流領域の時間間隔の確率密度関数及びそれらの領域における平均速度、乱れ度などが条件付サンプリングによって求められてきた(7)(8)(9)。また、最近ではコヒーレント・ストラクチャー(10)との関連での研究もなされている。

乱流 - 非乱流領域の判定は、間欠関数によってなされその割合は間欠係数によって知ることが出来る(11)。しかし、その様子は研究者によってまちまちでありそこから得られる結果も定性的な理解にとどまっている。本研究では、この乱流 - 非乱流領域の分布の様子を $h-\gamma$ スペクトラムによってとらえることをおこない、そこからより詳細な情報を得ることを目的とする。解析をおこなった乱流境界層は、層外主流の平均速度 $U_0 = 5.0$ (m/s)、境界層厚さ $\delta = 40.0$ (mm)、境界層厚さで定義されるレイノルズ数は $Re = 1.4 \times 10^4$ であり速度信号は境界層前縁から 1900 (mm) の位置において I 形熱線プローブによって測定された。また、壁面から速度信号測定位置までの距離を y (mm) とし、境界層厚さ δ で無次元化した値 y/δ をパラメータとして解析に用いることにする。

§ 3 - 1

一連の速度信号はデジタル化した離散データとして記録されており、サンプリング周期 $\Delta t = 0.2$ (ms) である。本実験では速度信号は流れ方向しか測定されていないため間欠関数 I_1 の決定は以下のように行った(13)。

i 番目の測定信号を \tilde{U}_i とし

$$\left| \frac{d\tilde{U}}{dt} \right|_i = \frac{1}{\Delta t} |\tilde{U}_{i+1} - \tilde{U}_i| \quad \Delta t = 0.2ms$$

これを N 点で平滑化を行う

$$\left\langle \left| \frac{d\tilde{U}}{dt} \right| \right\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{2N'} \left| \frac{d\tilde{U}}{dt} \right|_{i-N'+j} \quad N' = \frac{N-1}{2}$$

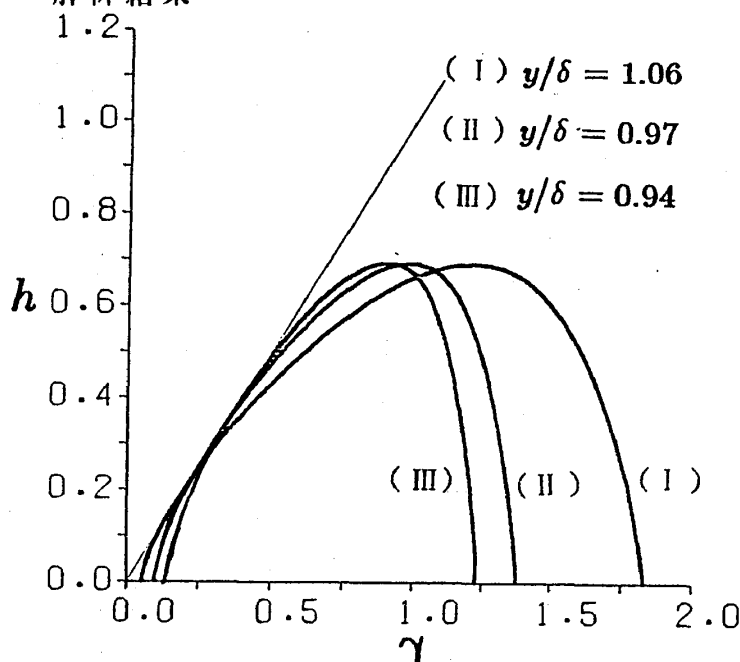
$$I_i = \begin{cases} 0: & \left\langle \left| \frac{d\tilde{U}}{dt} \right| \right\rangle_{i-1} \leq TH \\ 1: & I_i \neq 0. \end{cases} \quad \left\langle \left| \frac{d\tilde{U}}{dt} \right| \right\rangle_i \leq TH$$

TH は数値を表す。 $I_i = 1$ は乱流, $I_i = 0$ は非乱流状態を表す。このようにして決定される間欠関数 I_i から間欠係数 Γ が以下のように定義される。 n は全粒子数である。

$$\Gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i$$

この値がクレバノフによって与えられた間欠係数 (1.2) の値に一致するように、 y/δ に応じて TH を一意的に決定した。乱流境界層外縁付近では乱流領域が間欠的に出現するがその時間間隔は非乱流領域に比べて非常に短い。本解析では一ステップの時間間隔を乱流領域の平均時間として解析を行った。このようにして決定された間欠係数 I_i を s_i に対応させることにより、 § 2 でふれた確率 $P(s_1, s_2, \dots, s_n)$ が決定される。

§ 4 解析結果



(図 4-1) h - γ スペクトラム

図(4-1)は $y/\delta = 1.06, y/\delta = 0.97, y/\delta = 0.94$ の場合の $h - \gamma$ スペクトラムを表しており y/δ の値が大きいほど γ のとる値は大きくなっている。このことは乱流境界層外縁ほど比較的長い非乱流状態が局在していることを表している。図中の直線は $h = \gamma$ の直線を表し $h - \gamma$ スペクトラムは $q = 1$ で

また、コルモゴロフ・エントロピは壁面に近づくに従って増加し、外縁付近においては y/δ に比例して変化することが判明した。コルモゴロフ・エントロピにより空間的な乱流域-非乱流域の分布の複雑さに関する情報を定量的得ることができる。オーダパラメータ $\Psi(q)$ により本来は観測することの難しい領域をとらえることができた。壁面に近づくに従ってオーダパラメータは緩やかに変化し、これは壁面に近づくに従って乱流-非乱流の中間的な領域が増大していることを表していると予測される。

マルチフラクタル理論やカオス理論を実際の流体乱流現象に適用することには、まだまだ困難が多い。今後、これらの理論が実際の乱流現象の解明に多少なりとも寄与することを期待している。本研究を行ううえで有益な議論をして下さいました角田博之氏（名大工）に感謝致します。

[参考文献]

- (1) Sano, M., Sato, S., and Sawada, Y., Prog. Theor. Phys., Vol. 76 (1987), 945
- (2) Halsey, T. C., Jensen, M. H., Kadnoff, L. P., Procaccia, I., and Sraiman, B. I., Phys. Rev. A33 (1986), 1141
- (3) Honda, K., and Matsushita, M., (Preprint)
- (4) Sato, S., and Honda, K., (Preprint)
- (5) Sreenivasann, K. R., and Menevean, C., J. Fluid Mech., Vol. 173 (1986), 357
- (6) Heinz Georg Schuster., "Deterministic Chaos , Second Revised Edition", ed. VCH., (1988)
- (7) Hedley, T. B., and Keffer, J. F., J. Fluid Mech., Vol. 64 (1974), 645-678
- (8) Antonia, R. A., J. Fluid Mech., Vol. 56 (1972), 1-18
- (9) Leslie S. G. Kovaszny., Valdis Kibens., and Ron F. Blackwelder., J. Fluid Mech., Vol. 41 (1970), 283-325
- (10) 福西祐., 佐藤浩., ながれ., Vol. 2 (1983), 272-278
- (11) Thomas B. Hedley., and James F. Keffer., J. Fluid Mech., Vol. 64 (1974), 625-644
- (12) Klebanoff, P. S., NACA., Report 1247 (1954)., 1135-1153