

共鳴的加振の下での水面波の分岐及び不規則挙動

九大応力研

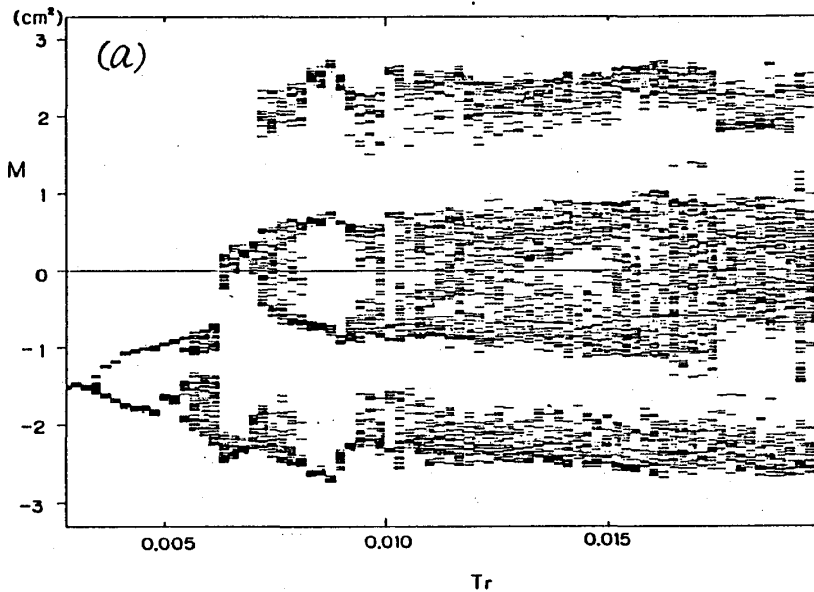
船越満明  
井上進

円筒形容器を、自由表面変位が  $\eta = J_1(kr) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$  と書ける2つのモードの  
固有振動数に近い、実際の結果及び理論との比較を述べる[  $(r, \theta)$  は極座標として  
は水まわりの正のグリセリン水溶液を用いた。加振変位を  $x_0 \cos \omega t$  とし、  $T_r =$   
(  $T - T_0$  ) /  $T_0$  [  $T_0$  は固有周期、  $T = 2\pi / \omega$  ] とすると、ある  $(T_r, x_0)$  の  
領域では、各点の波の振幅が、このようにある場合には、

$$\eta = (p_1 \cos \omega t + q_1 \sin \omega t) J_1(kr) \cos \theta + (p_2 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t) J_1(kr) \sin \theta,$$

と書いたときの  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$  の ( ゆっくりとした ) 時間変化を求めた。その結果、次のことがわかった。

- (i) 加振振幅  $x_0$  が大きいほど、あるいは波の減衰率  $\delta$  が小さいほど、振幅の変  
化が不規則でストレンジアトラクターが得られる割合が大きくなり、周期的振  
幅変化のみで得られる4次元位相空間内のアトラクターに對して、値を示し  
エクトリが平面  $p_1 = \langle p_1 \rangle$  を通るとき  $M = p_1 q_2 - p_2 q_1$  の平均値)。図1  
たものである。(  $\langle p_1 \rangle$  は、アトラクターにおける  $p_1$  の値の平均値)。図  
1(a)と(b)は  $x_0$  が異なるおりの大きい(a)の方がより頻りに力  
オス状態を示すことがわかる。また、図1(c)は、グリセリン52%水溶液  
(  $\delta$  は水の約2.5倍)での結果であるが、  $x_0$  が図1(a)よりも大きい  
もかわらず、カオスの現れる率が低いことがわかる。



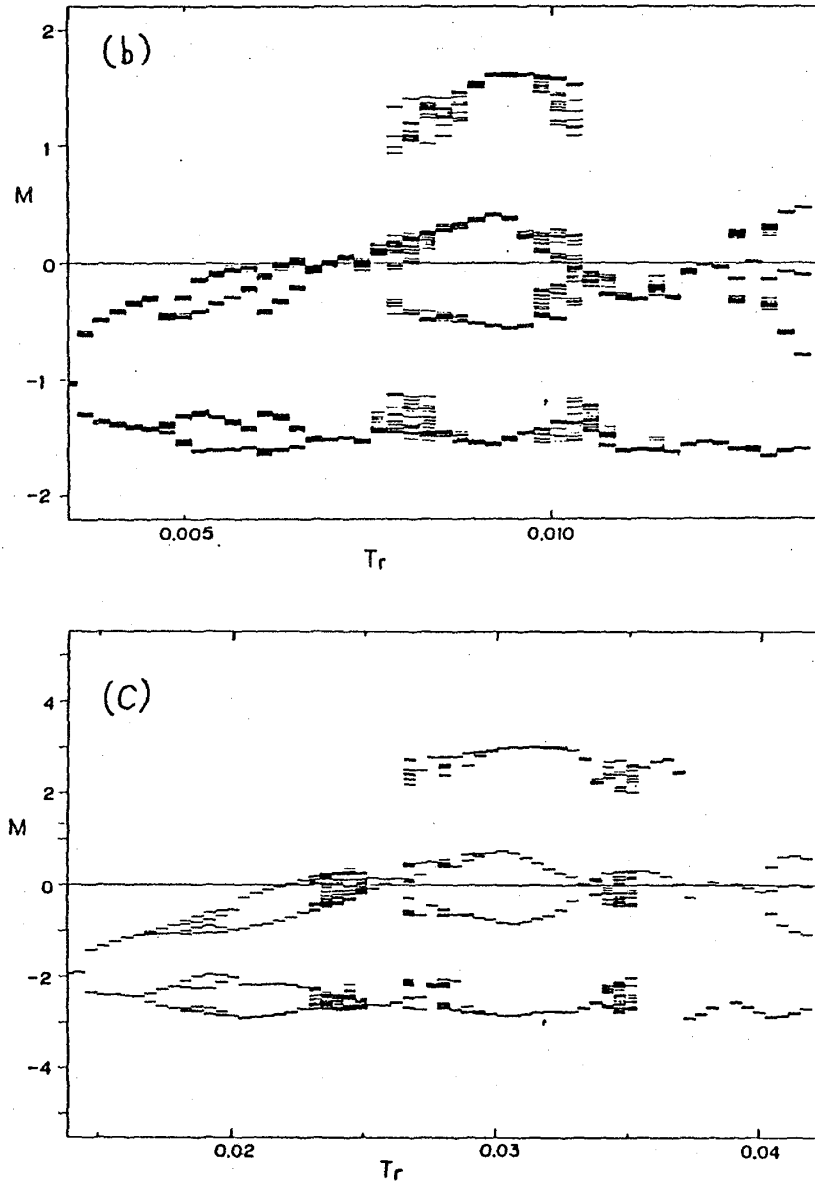
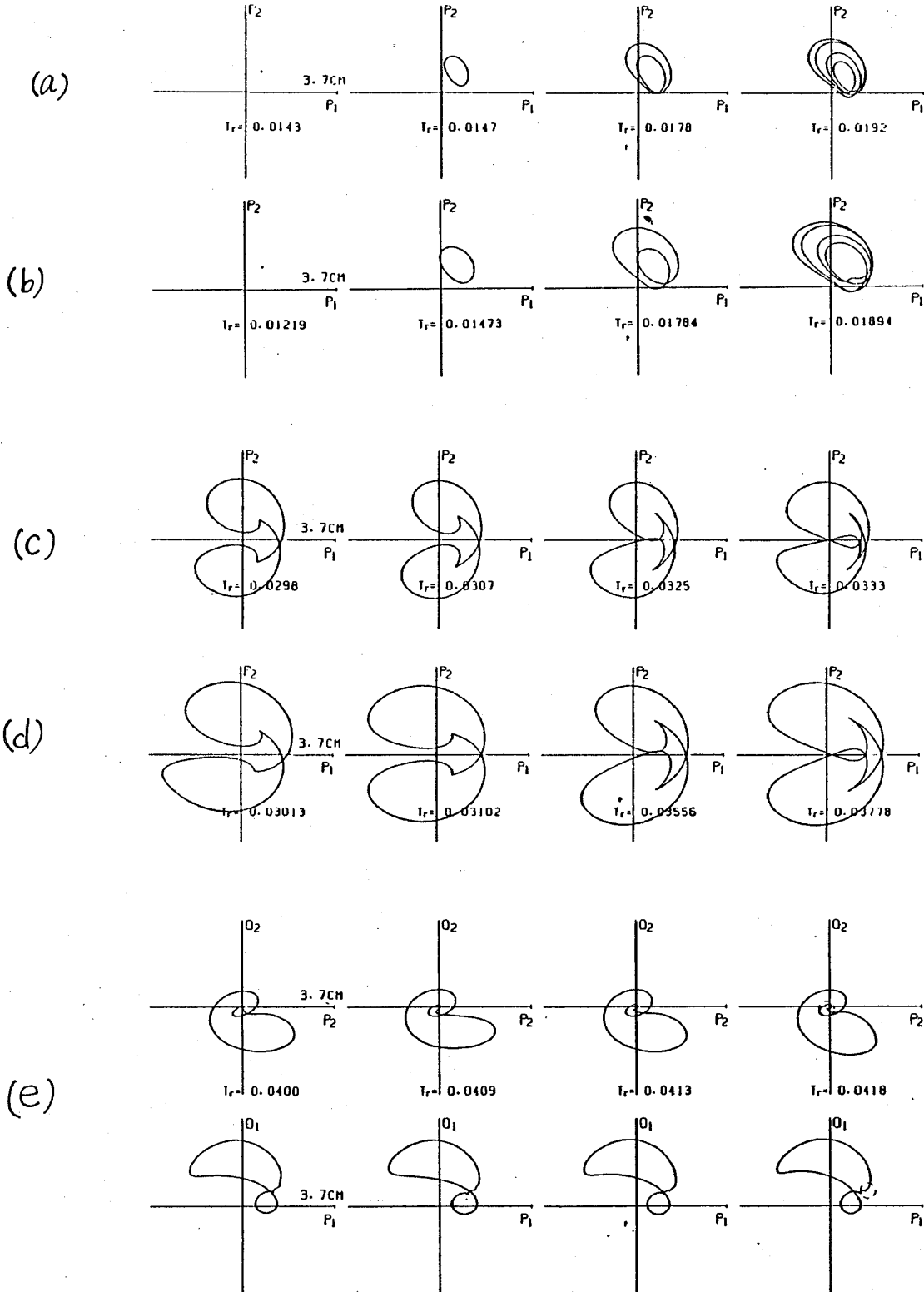


図1. (a) 水,  $x_0 = 0.025\text{cm}$ ; (b) 水,  $x_0 = 0.016\text{cm}$ ; (c) グリセリン52%水溶液,  $x_0 = 0.078\text{cm}$ .

(ii) ホップ分岐、周期倍分岐、(不完全な) symmetry-breaking 分岐、ホモクリニック分岐がみられた。図2(a)はホップ分岐に続く2回の周期倍分岐を示す。図2(c)は、非対称性の弱い状態と強い状態の間に移り変りを表わし、不完全な symmetry-breaking 分岐を示す。図2(e)は、 $T_r$  の増大とともに周期が増大していくホモクリニック分岐を表わしている。一方、Miles<sup>2)</sup> は平均化ラグランジアン法を用いて、次の方程式を導出した

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\alpha p_1 - (\beta + AE) q_1 + Bmp_2, \\ \frac{dq_1}{dt} = -\alpha q_1 + (\beta + AE) p_1 + Bmq_2 + X_0, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\alpha p_2 - (\beta + AE) q_2 - Bmp_1, \\ \frac{dq_2}{dt} = -\alpha q_2 + (\beta + AE) p_2 - Bmq_1, \end{cases}$$

ここで  $E = (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) / 2$ 、 $M = p_1 q_2 - p_2 q_1$  であり、 $A$ 、 $B$  は  $a/d$  のみによって決る定数、 $\alpha$  は減衰率、 $\beta$  は  $T_r$  の関数で定数である。実験における



(f)

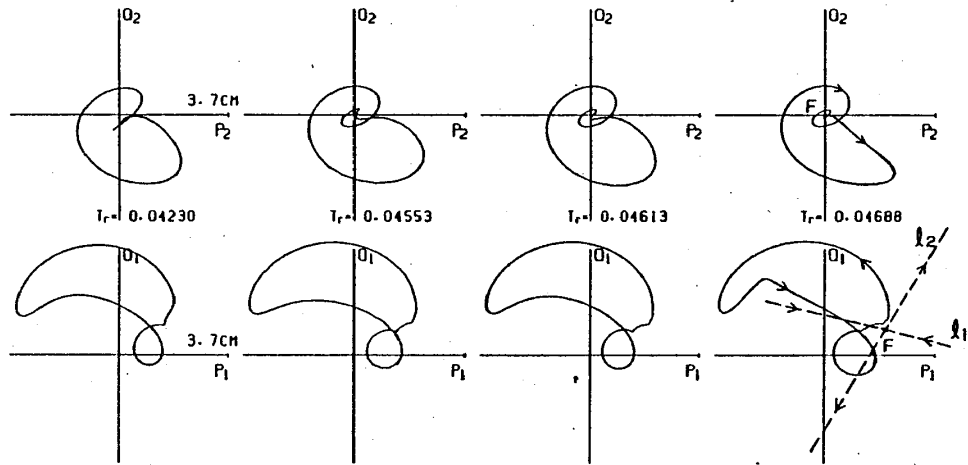


図2. グリセリン52%水溶液、 $x_0 = 0.078\text{cm}$ での実験、及び対応する数値計算の結果。(a),(c),(e)実験結果。(b),(d),(f)数値計算。各アトラクターは、 $(p_1, p_2)$ 平面あるいは $(p_2, q_2)$ 、 $(p_1, q_1)$ 平面へ射影して表現してある。

波の減衰率から計算した $\alpha$ を使って上の方程式を解き、実験結果と比べると、先の(i)(ii)の結果がよく再現されることがわかった。とくに分岐現象については、図2の(b),(d),(f)で示したように、出現するアトラクターの形もよく似ている。ただし、ホモクリニック分岐については、図2(f)のようなアトラクターを示す $T_r$ の領域の間に、他のアトラクターを与える $T_r$ の領域がはさまっていて実験と異なる。

#### 参考文献

- 1) Funakoshi & Inoue : J.Fluid Mech. 192 (1988) 219.
- 2) Miles : J.Fluid Mech. 149 (1984) 15.