

## ジョセフソン接合における間欠カオス

阪大・基礎工 吉木政行、西田良男

ジョセフソン接合のRSJモデルを使ってアナログシミュレーションをした結果、条件の違いによって間欠カオスのリターンマップが違ってくることがわかった。そして、それはI-V特性上のハーモニックステップにおける状態と密接な関係にあると考えられる。

### 1. はじめに

ジョセフソン接合におけるカオス現象は、今までデジタルおよびアナログシミュレーションによって調べられてきた。それによると I-V特性上のハーモニックステップでは 周期倍化現象から周期カオスへいたる過程が観測され、ハーモニックステップ間においては間欠カオスが観測される。今回、間欠カオスのリターンマップがI-V特性において両側にあるハーモニックステップ上で間欠カオスの発生する所に近い部分にどのような状態が存在するかによってマップの形が変わり、I-V特性にもそのリターンマップの違いが反映されていることがわかった。

### 2. モデル

ジョセフソン接合の量子的位相差 $\phi$ の運動は、RSJ(resistively shunted junction)モデルによると、外部からDC電流 $i_0$ とAC電流 $i_1 \sin \Omega_1 \tau$ を作用させた時 次の方程式で記述される。

$$\beta \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{d\phi}{d\tau} + \sin \phi = i_0 + i_1 \sin \Omega_1 \tau \quad (2.1)$$

$$v = \frac{d\phi}{d\tau} \quad (2.2)$$

ここで、電流 $i_0$ と $i_1$ 、接合電圧 $v$ 、振動数 $\Omega_1$ 、時間 $\tau$ の単位として それぞれ  $I_c$  (ジョセフソンの臨界電流)、 $I_c R$  ( $R$ : 接合間の抵抗)、 $\omega_0 = 2eI_c R / \hbar$ 、 $2\pi / \omega_0$  を使っている。また、 $\beta$ は McCumber parameter で  $\beta = 2eI_c R^2 C / \hbar$  ( $C$ : 接合の容量) である。

RSJモデルによる等価回路をFig.1に示す。(2.1)式の左辺の第1項は電気容量 $C$ を流れる

変位電流、第2項は抵抗Rを流れる準粒子電流、第3項はジョセフソン効果による超電流である。

接合間の電位差は ACジョセフソン効果の式(2.2)によって与えられ、位相差の時間微分に対応している。

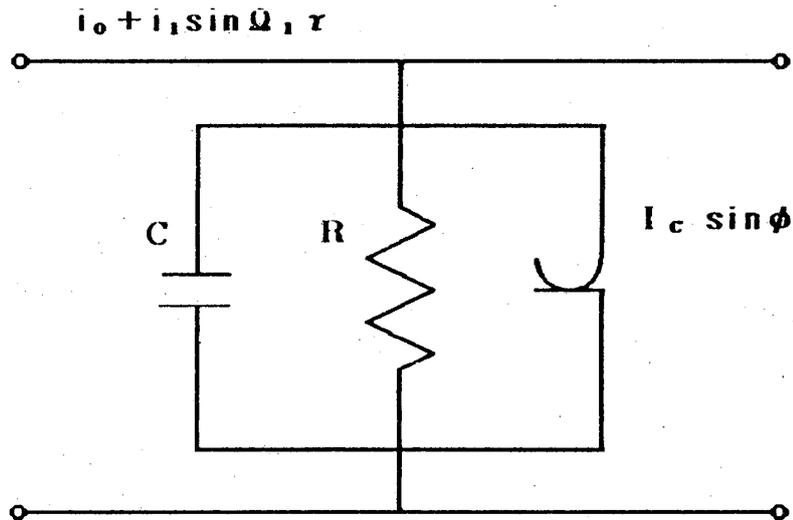


Fig.1 等価回路

### 3. I-V特性

I-V特性とは、外部から入れたDC電流に対する接合電圧  $v(\tau)$  の長時間平均

$$\langle v(\tau) \rangle = \left\langle \frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle = \frac{\phi(\tau+T) - \phi(\tau)}{T} \quad (T \gg 1) \quad (3.1)$$

の関係を表したものである。<>は長時間平均を意味する。

I-V特性はいくつかの定電圧ステップを示す。(3.1)に従うと  $\phi(\tau)$  の運動が外部振動数  $\Omega_1$  の  $k$  倍の周期に同期して、その間に  $2\pi m$  進むという周期運動が持続している状態が定電圧ステップに対応している。すなわち、

$$\langle v \rangle = \frac{m}{k} \cdot \Omega_1 \quad (k, m: \text{整数}) \quad (3.2)$$

の所に形成される。ここで  $k=1$  の定電圧ステップをハーモニックステップ、 $k>1$  のものをサブハーモニックステップと呼ぶ。

ここでは McCumber parameter  $\beta=1.8$ 、外部振動数  $\Omega_1=0.44$  を固定し、 $m=0$  と  $m=1$  のハーモニックステップ間における位相差  $\phi(\tau)$  の運動に注目する。

AC電流の振幅  $i_1$  が  $i_1=0.4$  と  $i_1=0.5$  の場合の  $I-V$  特性をそれぞれ Fig.2(a),(b) に示す。 $i_1=0.4$  の場合、サブハーモニックステップはあまり現れず、接合電圧が急激に増えている。 $i_1=0.5$  の場合、サブハーモニックステップが多く出現し、接合電圧は局所的に増えたり、減ったりしながら全体的にはだんだんと増えており、ジグザグ状の変化を示している。Fig.2のバイアス点①～③において波形およびリターンマップを観測した。これ以降  $i_1=0.4$  の場合をケース1、 $i_1=0.5$  の場合をケース2と呼ぶ。

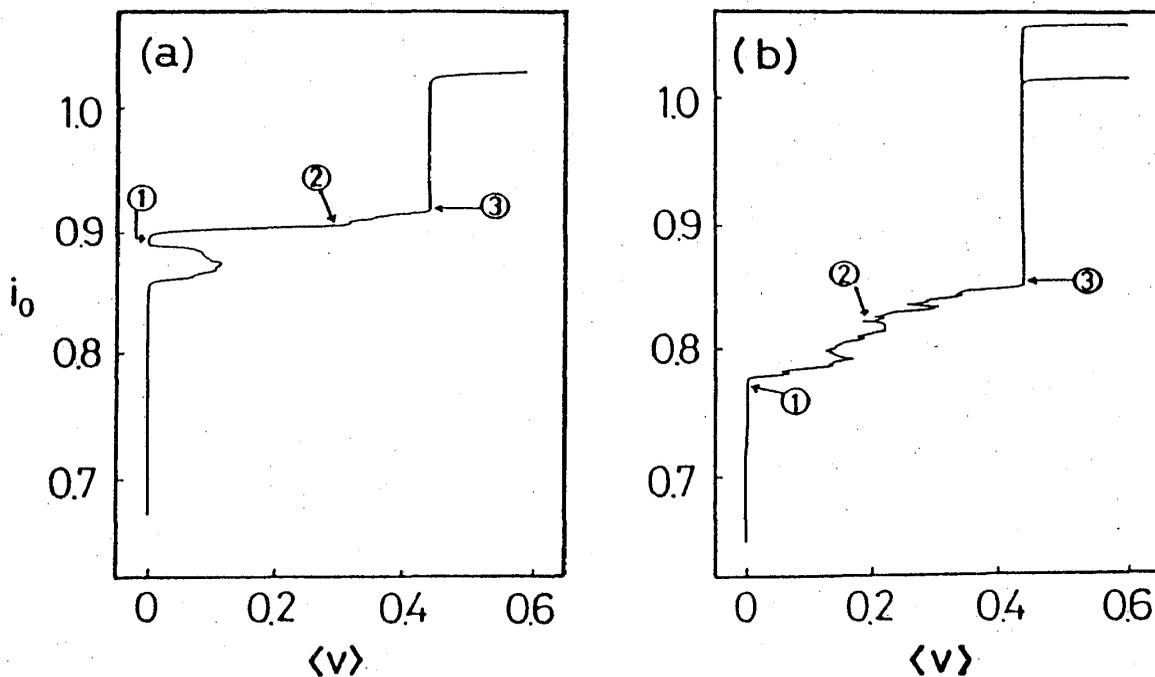


Fig.2  $I-V$ 特性  $\beta=1.8$ 、 $\Omega_1=0.44$

(a)  $i_1=0.4$  (b)  $i_1=0.5$

#### 4. 位相差 $\phi(\tau)$ の波形およびリターンマップ

観測量として量子的位相差  $\phi$  をとり、波形は外部周期  $\tau_1=2\pi/\Omega_1$  の間に100点を取り160周期分のデータを取った。また、リターンマップ ( $\phi_{n+1}$  VS  $\phi_n$ ) を書かせるために外

部周期  $\tau_1 = 2\pi/\Omega_1$  の間隔でサンプリングし  
 158点分のデータをとった。リターンマッ  
 プには写像の様子がわかるように 傾き45°の  
 直線  $\phi_{n+1} = \phi_n$  が書き加えられている。

(1) ケース1

$i_1 = 0.4$  のときの  $I-V$  特性は Fig.2(a) の  
 ようになり、バイアス点①、②、③における波  
 形およびリターンマップはそれぞれ Fig.3①、  
 ②、③と Fig.4①、②、③に示している。

$m=0$  のハーモニクステップ上のバイア  
 ス点①における  $\phi(\tau)$  の状態は、外部振動数  
 に引き込まれ、外部周期と同じ周期をもった  
 周期-1の状態である。このとき位相差  $\phi$  は  
 $\pi/2$  付近で振動している (Fig.3①)。この  
 ときのリターンマップは Fig.4①で  $\phi$  は一つ  
 の周期点にとどまっている。

$m=1$  のハーモニクステップ上のバイア

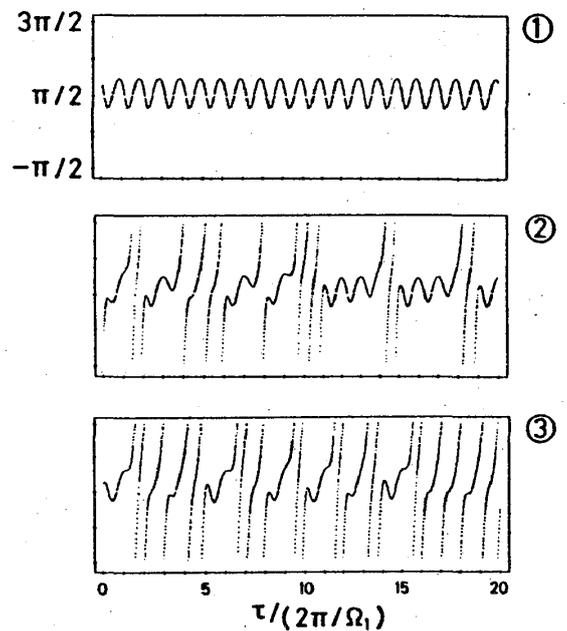


Fig.3  $i_1 = 0.4$  の場合の位相差  $\phi(\tau)$  の  
 波形。①~③は Fig.2(a) のバイアス  
 点①~③に対応する。

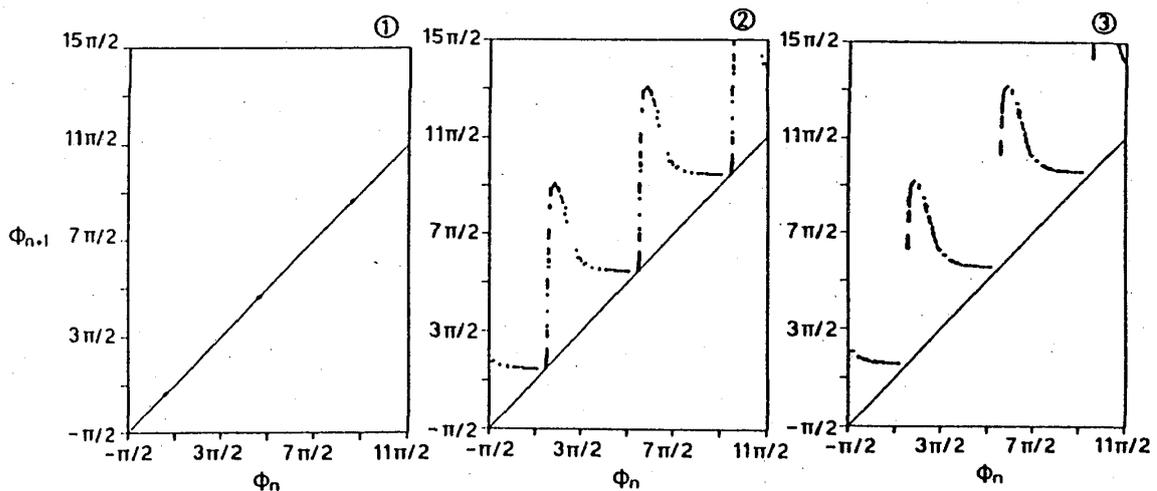


Fig.4  $i_1 = 0.4$  の場合のリターンマップ。①~③は、  
 Fig.2(a) のバイアス点①~③に対応している。

ス点③における状態は周期倍化現象の末に現れる周期カオス状態である。Fig.3③の波形をみると非周期運動をしていることがわかる。

また、Fig.4③のリターンマップは不連続であるが点ではなく線状になっており非周期であることを示している。このとき $\phi_n$ は部分的な領域の値しかとらず、外部周期ごとに一つの連続した部分から  $2\pi$ 進んだ先にある別の連続した部分へと写像されている。つまり、平均的にみれば外部周期ごとに位相差 $\phi$ は $2\pi$ 進んでいるといえる。

$m=0$ と $m=1$ のハーモニックステップ間のバイアス点②における状態は、間欠カオス状態である。Fig.3②の波形はFig.3①とFig.3③の状態の組合せでできており、間欠的にその間を行き来している。このときのリターンマップFig.4②は連続で、 $\phi_n$ のとりうる値は全域にわたっており、運動の非周期性が増している。形は周期カオス状態のリターンマップに振動状態を引き起こす部分が加えられたものになっている。このリターンマップの形は $m=0$ と $m=1$ のハーモニックステップ間において変わらない。

DC電流 $i_0$ を小さくしていくと、リターンマップは直線 $\phi_{n+1}=\phi_n$ に近付いていく。リターンマップが直線と交わると位相差 $\phi(\tau)$ の運動がFig.4①の周期運動になってしまう。P-M I型の間欠カオス<sup>1)</sup>のリターンマップと比較すると Fig.4②のリターンマップは、直線 $\phi_{n+1}=\phi_n$ との channel部分が短く、振動状態(ラミナー状態)が長く続く間欠カオス状態にはなりえない。それがI-V特性(Fig.2(a))にも反映されており $m=1$ のハーモニックステップから $m=0$ のハーモニックステップに移るときには $m=1$ と $m=0$ の中間部分から急に $m=0$ のハーモニックステップに移っている。

## (2) ケース2

Fig.2(b)に示した $i_1=0.5$ のときのI-V特性においては $m=0$ のハーモニックステップに近い部分にバイアスでき、振動部分が長く続く間欠カオス状態が存在すると予想される。Fig.2(b)の図中に示したバイアス点①、②、③における波形とリターンマップをそれぞれFig.5①、②、③とFig.6①、②、③に示す。

$m=0$ のハーモニックステップ上のバイアス点①における位相差 $\phi(\tau)$ の運動は、周期カオス状態である。これは $\phi(\tau)$ が $\pi/2$ 付近で振動している状態であるが、ケース1とは違い、外部振動数に完全には引き込まれず、非周期運動をしている(Fig.5①)。このときのリターンマップは、Fig.6①に示すように線状のマップが現れていて、周期カオス状態であることを示している。

$m=1$  のハーモニックステップ上のバイアス点③においては、 $\phi(\tau)$ は周期運動をしている (Fig.5③)。しかし、Fig.6③に示すリターンマップを見ればはっきりわかるように周期倍化現象により外部周期の2倍の周期をもった周期-2の状態になっている。

$m=0$  と  $m=1$  のハーモニックステップ間の間欠カオス状態の波形、リターンマップをそれぞれFig.5②、Fig.6②に示す。ケース1のときとは違い、直線  $\phi_{n+1} = \phi_n$  とのchannel部分を作らず、交わっている。形としては、Fig.6①、③のリターンマップをたして、その間を結んだものになっている。1-V特性で予想したとおりケース2の間欠カオスのリターンマップは振動状態が長く続くことが起こりうる形をしている。しかし、振動状態が長く続く機構は、P-M I型の間欠カオス、

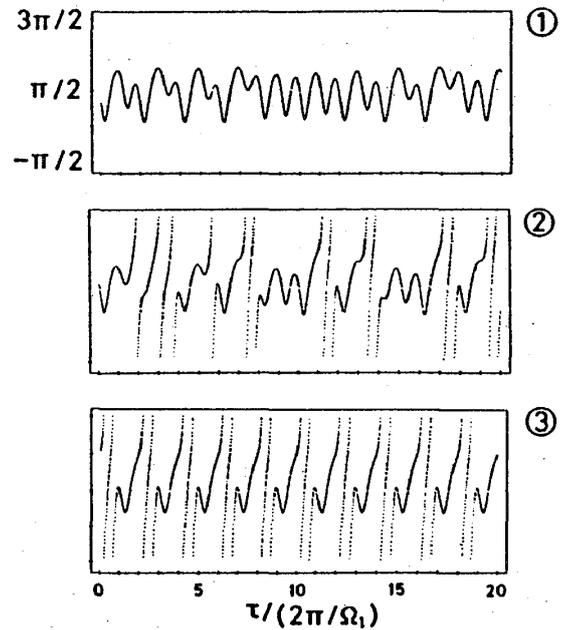


Fig.5  $i_1=0.5$  の場合の位相差  $\phi(\tau)$  の波形。①~③はFig.2(b)のバイアス点に対応している。

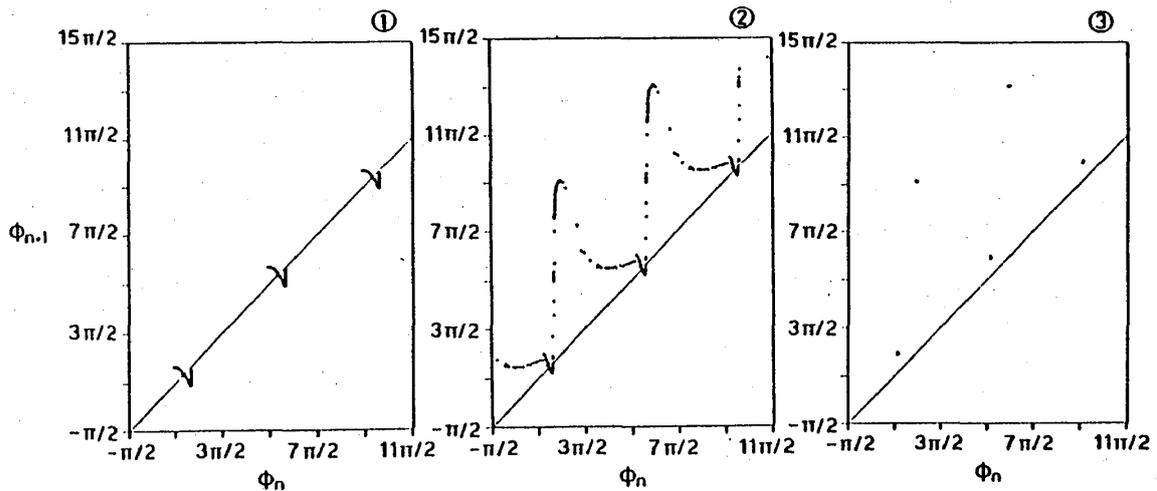


Fig.6  $i_1=0.5$  の場合のリターンマップ。①~③はFig.2(b)のバイアス点①~③に対応している。

または、P-M III型の間欠カオスとは違い、直線 $\phi_{n+1} = \phi_n$ と交わった部分、つまり $m=0$ のハーモニックステップ上での周期カオスのリターンマップを引きずっている部分で長く続く振動状態が起こっている。このリターンマップの形もハーモニックステップ間において変化しない。

## 5. 結論

I-V特性上のハーモニックステップ間に存在する間欠カオスのリターンマップは、I-V特性上の両側にあるハーモニックステップの位相差 $\phi$ の運動状態の間を間欠的に移り変わる形をしており、両側にどのような運動状態が存在するかによってリターンマップの形は変化する。そのリターンマップの形によって、I-V特性もDC電流を増やす過程において接合電圧がジグザグ状に変化する場合と、単調に増加するだけの場合とに分けられる。

## 参考文献

- 1) Y.Pomeau and P.Manneville : Commun.Math.Phys. 74(1980)189