

結合電子回路における カオスーカオス転移

熊本大教育 福島和洋
九工大工 山田知司
愛教大物理 矢崎太一

結合振動子のカオスを調べることは、少数自由度系から多数自由度系へのつながりという点において、意義深い。最近、結合系のカオスに関し、興味ある結果がいくつか報告されている。例えば、Fujisaka and Yamada は2つの振動子の結合系において、両者が共にカオスの状態で同期した（引き込んだ）状態から、その引き込みが破れるときに、新しい type の intermittency が起こることを見出した。¹⁾ coupled map lattice²⁾ や電子回路による type-II intermittency の観測³⁾ なども結合系カオスの例である。

我々は、2つの同等な振動子の結合系と等価な電子回路を用いて、実験的に結合系カオスの研究を行った。実験回路を Fig.1 に示す。1つの振動子は、 $L(=100\mu\text{H})$ 、 $R(=17.5\Omega)$ 、ダイオード(1SV50)からなり、2つの系は L_0 によって結合している。結合定数 κ は L/L_0 で与えられる。また共通の外力として電源電圧 $E(t) = V_0 + G \sin \omega t$ を持つ。この実験では、直流バイアスは $V_0 = 1\text{V}$ で固定し、 G と ω を変化させ、ダイオードの両端の電圧を観測した。測定は A/D 変換器を用いてデジタルデータとして取り込んでいる。

最初に $\kappa = 1$ のときの、 $G - \omega$ に対する相図を Fig.2 に示す。図中点線の外側の1と記した領域では、外力に等しい1-周期の振動を行い、破線より高振動数側では、2つの振動は位相を揃えて、同期している。

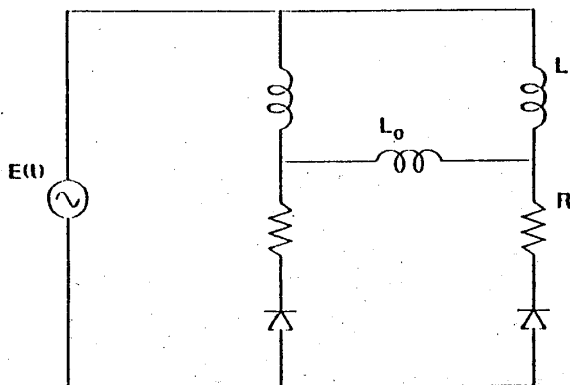


Fig. 1

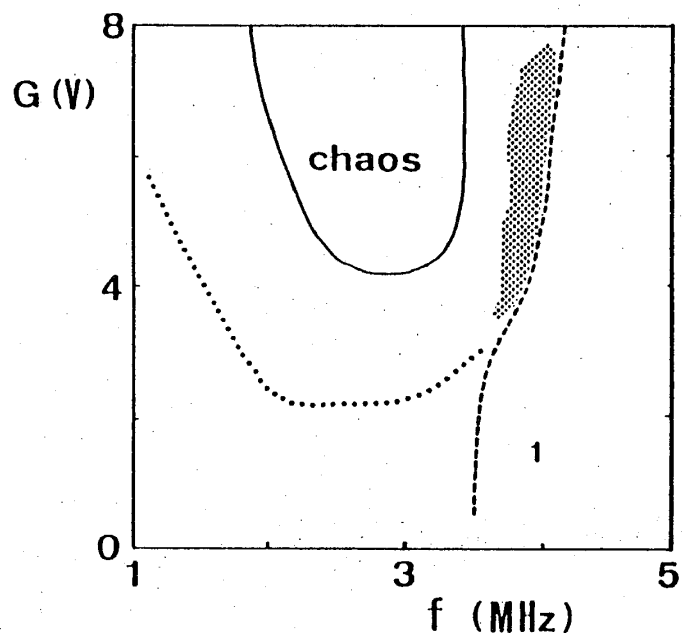


Fig. 2

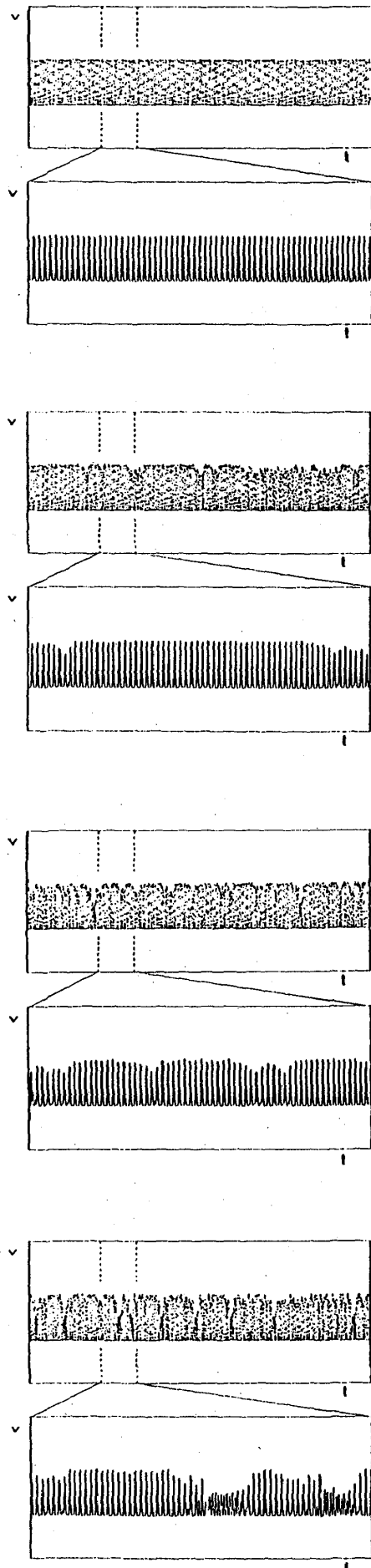


Fig. 3

点線の内側には、1、2、4-周期、準周期などの相が混在し、特に影で示した領域では type-III intermittency が観測される。⁴²⁾ Type-III intermittency は引き込みが破れたところで起こっている。実線の内側がカオスの領域であり、このカオスがどのような type のカオスであるかを、次の2つのルートについて調べた。1つはこの冊子において、つまり $\kappa=1$ において、 ω を一定に保ち、 G を大きくしていく場合のルートであり、もう1つは G 、 ω を固定して、結合の強さを変えていくルートである。

まず、1番目のルートについて実験結果を示す。Fig.3 は、 $f=2.94$ MHz とし、 $G=4.2, 4.3, 4.4, 4.5$ V と変えていったときの波形である。 $G=4.2$ V では2-周期振動の状態にあり、 G を大きくするに従い、intermittent な乱れを生じながらカオス化していく。これらの波形に対する map は1次元的ではなく、実験データから計算した Lyapunov 指数は、2つの値が正値をとるようである。更に、 $G=4.5$ V について、アトラクターのフラクタル次元（相関次元）を求めると、次元は約 3.6 程度の値が得られた。Fig.4 にそれを示す。以上の解析より、この intermittency は Pomeau-Manneville type⁵²⁾ ではなく、高次のカオスであると考えられる。

我々は、実験に加えて、回路についてたてたモデル方程式⁴³⁾ の数値計算も行った。

Fig.5 に、 $G=4.7$ V に対する実験と数値計算による波形の比較を示した。両者は良く一致しており、この後、実験結果と併せて、数値計算の結果も示していく。

次に、結合定数 κ を変えた場合について述べる。結合が強いとき ($\kappa = 23.8$) 2つの振動子は互いに引き込みながら、周期倍化分岐を経てカオスに到る。

Fig. 6 に $f = 2.8 \text{ MHz}$ で $G = 4.5, 5.2, 6.0, 6.8 \text{ V}$ の場合についてのオシロスコープ上の波形とXYプロットを示す。波形は上が振動子1 (V_1) で、下が振動子2 (V_2) である。ただし、 V_2 に関してはpolarityを逆にして表示した。XYプロットは、横軸に V_1 、縦軸に位相をずらした V_2 をとって表示した。 $G = 4.5 \text{ V}$ では2-周期振動の状態にあり以下4、8-周期、カオスとなる。カオスの状態 ($G = 6.8 \text{ V}$) でも2つの振動子は互いに引き込んで振動している。

結合を次第に弱くしていくと、引き込みが破れ、2つの振動子間に電圧差が生じ始める。Fig. 7には、 $f = 2.8 \text{ MHz}$ 、 $G = 8.0 \text{ V}$ について、上から $\kappa = 23.8, 10.0, 4.5$ の場合のそれぞれ波形、XYプロット、電圧差 ($V_1 - V_2$) が示されている。 $\kappa = 23.8$ では、2つの振動子間の電圧差はほとんど0で強く引き込んだ状態にある。 $\kappa = 10.0, 4.5$ では徐々に電圧差が生じ、引き込みの破れた状態が実現している。しかしながらこれらは非周期振動であるため、オシロスコープでは、同期がとれないため、どのように電圧差が生じていくのか正確な情報が得られない。今回は A/D変換器を用いた測定を行っていないので、以下に数値計算により引き込みが破れる様子を調べた結果を示す。

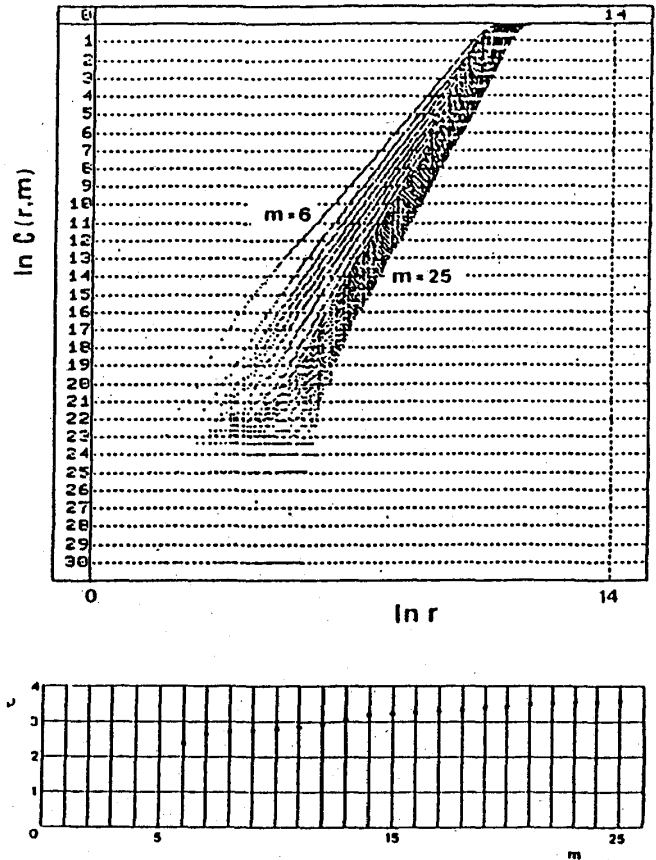


Fig. 4

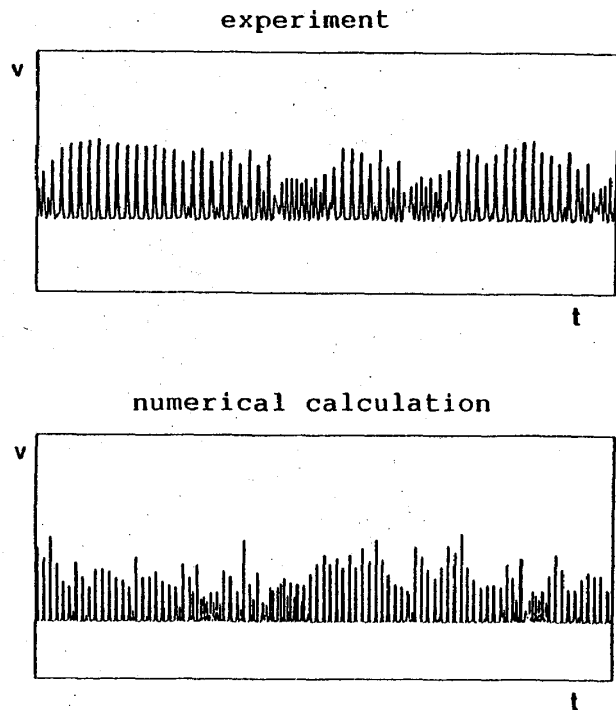


Fig. 5

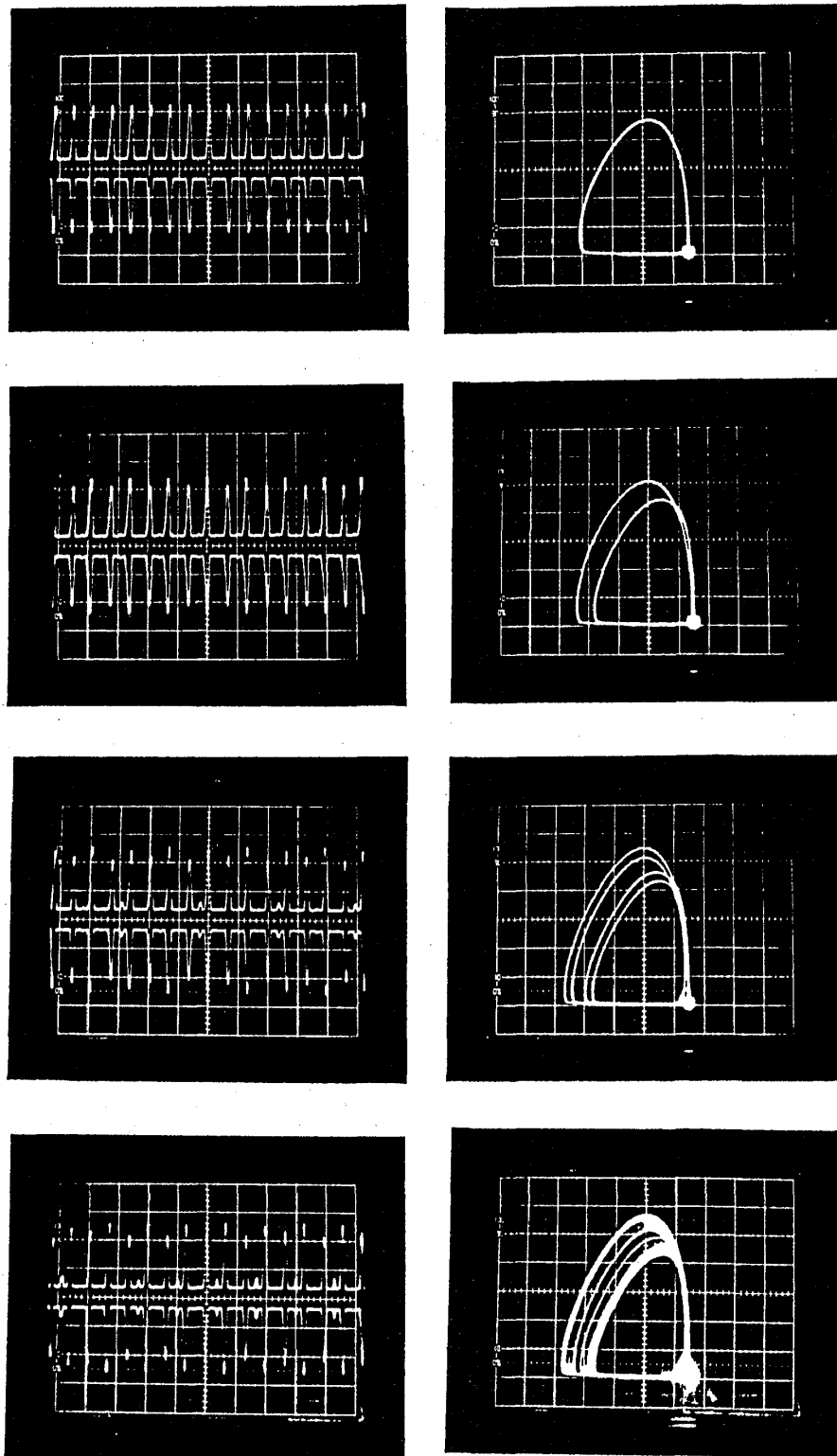


Fig. 6.

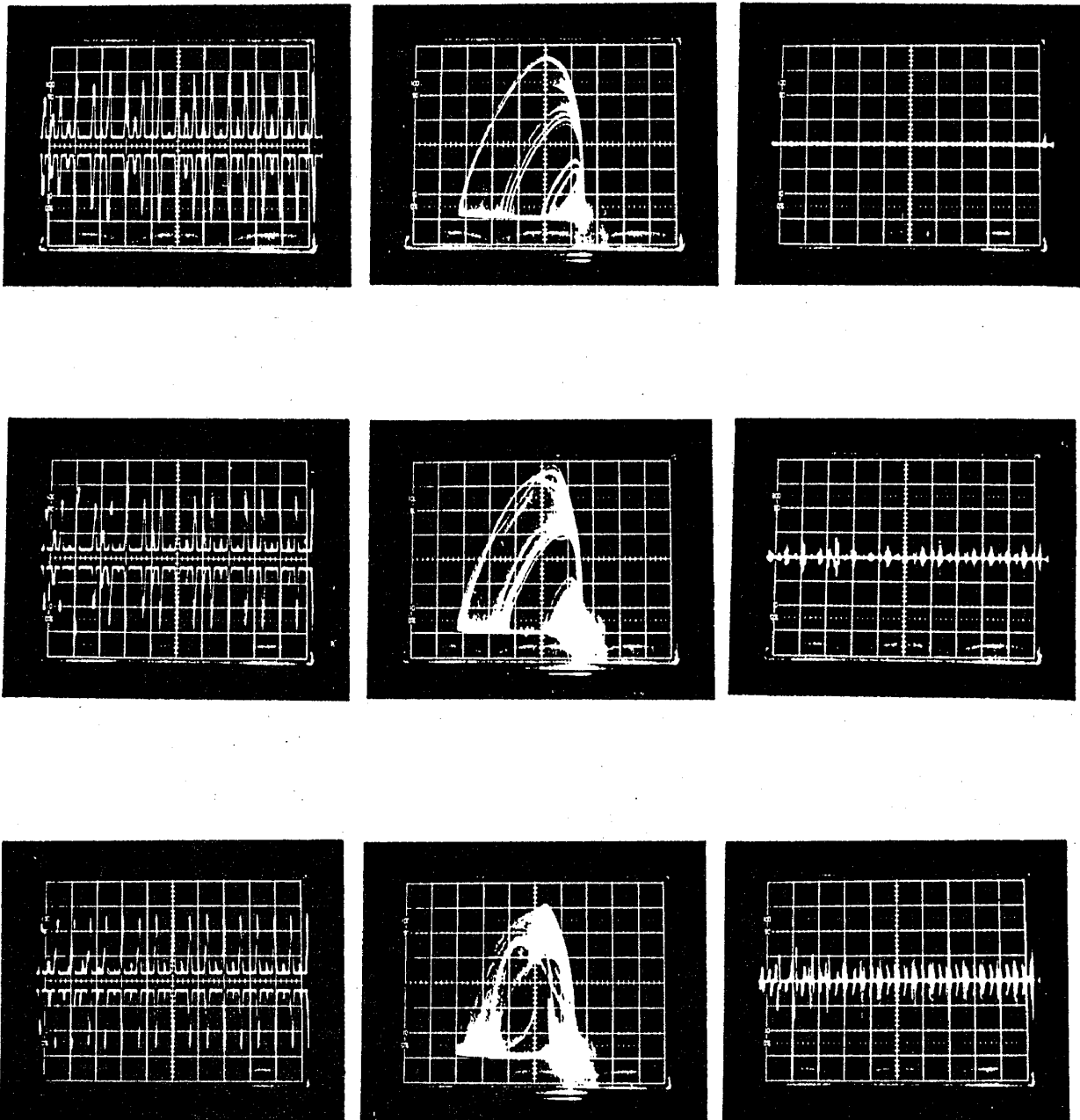


Fig. 7

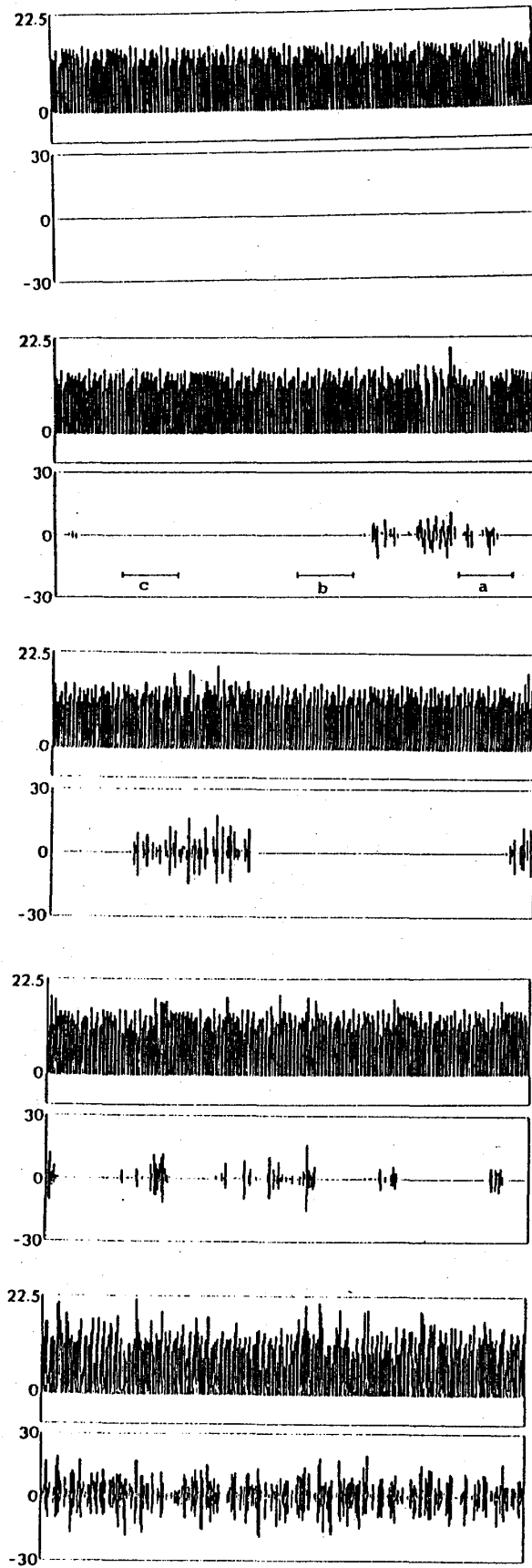


Fig. 8

結合定数を変えて得られた数値計算の結果を Fig.8 に示す。

$\kappa=8.0, 6.0, 4.0, 3.0, 2.0$ についてそれぞれ、上図が振動子1の波形で、下図が電圧差である。

$\kappa=8.0$ では、2つの振動子は共にカオスの状態で完全に引き込んでいる。結合を次第に弱くしていくと、引き込みが徐々に破れていくことがわかる。電圧差の波形を見ると、引き込みの破れは、intermittent な burst として現れる。

$\kappa=2.0$ では完全に引き込みが破れている。更に、興味深いことは、この burst の大きさに分布があることである。 $\kappa=6.0$ の電圧差のグラフを拡大してみる。Fig.9 に Fig.8 中の (a)、(b)、(c) の部分をそれぞれ縦に2倍、32倍、500倍に拡大した波形を示す。(時間軸はすべて約8倍に伸ばしてある。)

これを見ると、各々の burst は自己相似的な時間変化を示していることがわかる。 $\kappa=6.0$ のデータについて、頻度分布、即ち、横軸に $r = |V_1 - V_2|$ をとり、4096点(512周期分)のデータのうち、 r より小さい値を持つデータ点の数 N を縦軸にとったグラフを Fig.10 に示した。 r の小さいところでは、グラフはほぼ直線的であり、 $P(r)$ を分布関数として

$$N = \int_0^r P(r) dr \propto r^\eta$$

と表すことができる。傾きより $\eta \approx 0.04$ が得られる。 κ が大きくなるに従って η は小さくなり、転移点で $\eta = 0$ となることが期待される。

以上の数値計算の結果は、結合振動子系に特徴的な（一様）カオス—（非一様）カオス転移に伴う Fujisaka - Yamada type の intermittency が実験的に得られたことを支持しているものと思われる。1つの振動子系では周期倍化分岐によるカオスしか存在しなかったものが、2つを結合させるだけで複雑なカオス状態を呈するようになる。さらに結合数を増やし、振動子集団としての系を調べることは、相転移との関係などにおいて今後増々興味深くなるであろう。

参考文献

- 1) H. Fujisaka and T. Yamada: Prog. Theor. Phys. 74(1985)918; 75(1986)1087.
- 2) J. P. Crutchfield and K. Kaneko: "Phenomenology of Spatio-temporal Chaos," in Directions in Chaos (World Scientific, 1987).
- 3) J. Y. Huang and J. J. Kim: Phys. Rev. A 36 (1987)1495.
- 4) K. Fukushima and T. Yamada: J. Phys. Soc. Jpn., 57(1988)4055.
- 5) Y. Pomeau and P. Manneville: Commun. Math. Phys. 74(1980)189.

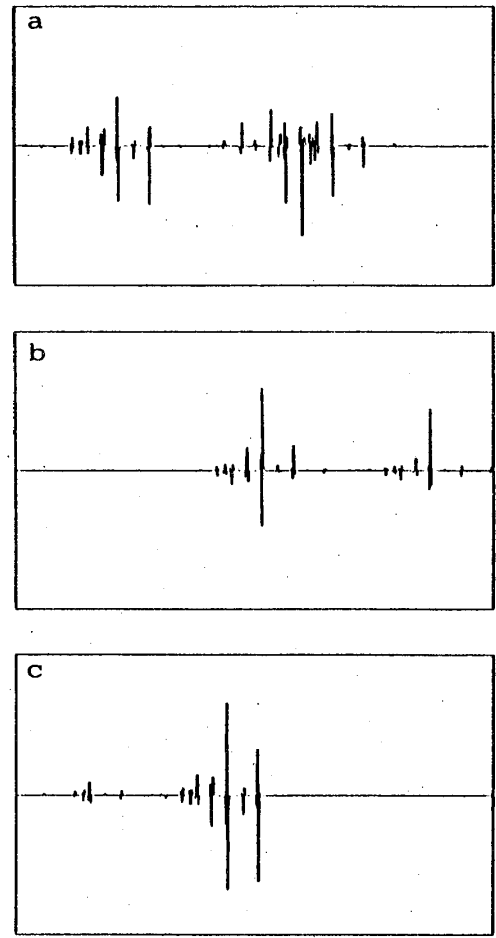


Fig. 9

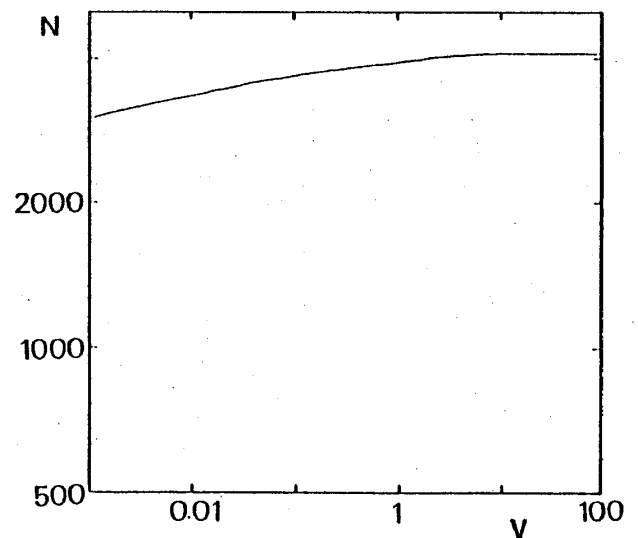


Fig. 10