

## 一次元写像のピアソン表示像の性質

永井喜則<sup>1</sup>, 市村 純<sup>2</sup>, 土屋 尚<sup>3</sup><sup>1</sup>麻布大・教養, <sup>2</sup>山梨学院大・経営情報, <sup>3</sup>アドバンス自然研

われわれは一次元写像の初期値全体を一望する方法として、二次元ランダムウォークの一つであるピアソンウォークを利用した表示法を考案した。そしてこれをピアソン表示と名付けた<sup>1)</sup>。ピアソン表示では、初期値全体は単位円として表現され、軌道はこの円の変形として表現される。例えば、ロジスティックマップにおけるピアソン表示された周期解は、時間発展しても円変形体の不変図形（合同図形）となる。また、ウィンドー領域のロジスティックマップでは、彗星のように尾をひいた形が時間と共に拡大してゆく。そしてその形は相似形を示す。カオス状態での一次元写像は時間発展のかなり早い段階でばらけた点の集合のような様相を示し、時間の1/2乗に比例して拡大してゆく。この場合も形は相似性を示す。このような一次元写像のピアソン表示像に見いだされる相似性あるいは合同性といった形の不変性は着目してよい量と思われる。

次に、われわれはピアソン平面を規格化した規格化ピアソン表示を考えた<sup>2)</sup>。そして、一次元写像の不変測度が存在すれば、規格化ピアソン平面の一点に像が収束することを見いだした。さらに、その収束の過程で先に述べたマップに特有の形は保存されていることも確認した。規格化ピアソン表示の性質を利用してロジスティックマップ  $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$  のパラメータ  $a$  を変え、規格化ピアソン平面内での規格化ピアソン表示像の収束点の動きをみたものが図1である。このような方法はカオスを分類する可能性を開く。

規格化ピアソン表示でも、系がエルゴートのか否かとか、不変測度の存在、不変測度の再構成等いろいろな応用の仕方が考えられる。われわれは以下でピアソン表示像の形の不変性を調べるために、最初に考えたピアソン平面での表示像に帰ることにする。

ピアソン表示像の形をピアソン平面内での像の濃淡として次の式で表現する。

$$P_n(x, Y) = A^{-1} \int_0^1 \delta(X - X_n(x_0)) \delta(Y - Y_n(x_0)) dx_0$$

ただし、一次元写像を  $f: x \rightarrow x'$  として、

$$X_n(x_0) = \operatorname{Re} Z_n(\alpha, x_0) = l \sum_{k=0}^{n-1} \cos \alpha f^k(x_0)$$

$$Y_n(x_0) = \operatorname{Im} Z_n(\alpha, x_0) = l \sum_{k=0}^{n-1} \sin \alpha f^k(x_0)$$

であり、 $l$  と  $\alpha$  は ウォーカーの歩幅と最大転回角、そして  $x_0$  は初期値である。 $\rho_n$  の規格化条件から  $A = 1$  であることが判る。像の中心は変数  $X$  と  $Y$  の平均値  $\langle X \rangle_n$ ,  $\langle Y \rangle_n$  で与えられる。 $\langle X \rangle_n + i \langle Y \rangle_n$  という量を作ると、

$$\langle X \rangle_n + i \langle Y \rangle_n = l \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\alpha f^k(x_0)} dx_0 = n l \int_0^1 \frac{Z_n(\alpha, x_0)}{n l} dx_0$$

が得られる。上式の最後の表現の積分の中は規格化ピアソン像を表している。これから、規格化ピアソン像が一点に収束してゆく場合、もとのピアソン像の中心はステップ毎に等間隔で移動してゆくことがわかる。

次に、像の分布の特徴を調べるために像の中心のまわりの濃淡に関する2次モーメント量を計算する。この目的のために、原点が像の中心にくるように座標を移動する。そのときの像の濃淡の分布は

$$\tilde{f}_n(x', y') = \int_0^1 \delta(x' - X_n(x_0) + \langle X \rangle_n) \delta(y' - Y_n(x_0) + \langle Y \rangle_n) dx_0$$

で与えられる。このとき、 $\langle X' \rangle_n = 0$ ,  $\langle Y' \rangle_n = 0$  である。また  $\langle X'^2 \rangle_n + \langle Y'^2 \rangle_n$  あるいは  $\langle X' Y' \rangle_n$  のような量を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle X'^2 \rangle_n + \langle Y'^2 \rangle_n &= l^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-1} \cos \alpha (f^k(x_0) - f^{k'}(x'_0)) (\delta(x_0 - x'_0) - 1) dx_0 dx'_0 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha^2)^m l^2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\tau=1}^{n-k} (f^{k+\tau}(x_0) - f^k(x'_0))^{2m} + \sum_{k=0}^{n-1} (f^k(x_0) - f^k(x'_0))^{2m} \right\} (\delta(x_0 - x'_0) - 1) dx_0 dx'_0 \\ \langle X' Y' \rangle_n &= l^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-1} \sin \alpha (f^k(x_0) - f^{k'}(x'_0)) (\delta(x_0 - x'_0) - 1) dx_0 dx'_0 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m l^2 \alpha^{2m+1} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\tau=1}^{n-k} (f^{k+\tau}(x_0) - f^k(x'_0))^{2m+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (f^k(x_0) - f^k(x'_0))^{2m+1} \right\} (\delta(x_0 - x'_0) - 1) dx_0 dx'_0 \end{aligned}$$

計算結果を見て判る通り  $\langle X'^2 \rangle_n + \langle Y'^2 \rangle_n$  はマップ  $f$  に関する偶数次の2時間モーメントだけの和であり、 $\langle X' Y' \rangle_n$  はマップ  $f$  に関する奇数次の2時間モーメントだけの和である。 $\langle X'^2 \rangle_n + \langle Y'^2 \rangle_n$  は像の広がり距離の二乗平均を表す物理量であり、 $\langle X' Y' \rangle_n$  は2つの変数の独立性をみる物理量で

ある。

S B マップ  $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$  のピアソン像は円状にひろがる。また、テントマップ  $x_{n+1} = 1 - 2|x_n - 1/2|$  のピアソン像は楕円状にひろがる。このような形の違いは、S B マップの二時間奇数次相関関数がゼロになり<sup>3)</sup>、テントマップのそれはゼロ以外の値をとる<sup>3)</sup>ことから、S B マップでは  $\langle X' Y' \rangle_n$  はゼロになり、テントマップでは  $\langle X' Y' \rangle_n$  はゼロ以外の値をとることが期待される。 $\langle X' Y' \rangle_n$  という量は形の違いを見る一つの目安になるであろう。

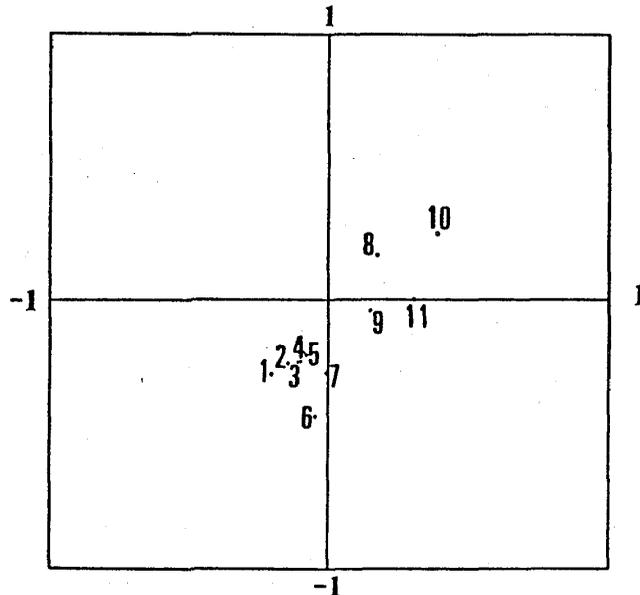


図1 ロジスティックマップ  $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$  の規格化ピアソン平面上的ピアソン像の収束点をパラメータ  $a$  を変えて調べたもの。  $a$  の値は次の通りである。

1:3.4 (周期2) 2:3.5 (周期4) 3:3.56 (周期8) 4:3.57 (周期 $2\infty$ )  
 5:3.6 6:3.7 7:3.75 8:3.8285 (ウインド-周期3) 9:3.92  
 10:3.96025 (ウインド-周期4) 11:4.0

#### 文献

- 1) Y. Nagai, A. Ichimura, T. Tsuchiya Physica 134A (1985) 123
- 2) Y. Nagai, A. Ichimura, T. Tsuchiya Physica 150A (1988) 40
- 3) Y. Nagai, A. Ichimura, T. Tsuchiya Phys. Lett. 101A (1984) 447