[11] Okabe, Y., Lecture Notes in Control and Information Scienees, **49** (1983) 215-226

[12] Okabe, Y., Commun. Math. Phys. **98** (1985) 449-468

[13] Okabe, Y., J. Fac. Sci. Univ Tokyo Sect IA, **33** (1986) 1-56

[14] Okabe, Y., J. Stat. Phys. **45** (1986) 953-981

[15] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **15** (1986) 163-216

[16] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **15** (1986) 317-355

[17] Okabe, Y., Prob. Theory and Math. Stat. **Vol-2**, 431-436, Prohovov et al. (eds), 1986 VNU Science Press

[18] Okabe, Y., Lecture Notes in Math., Springer **1299** (1986) 391-397

[19] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **16** (1987) 315-341

[20] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **17** (1987) 1-41

[21] Okabe, Y., to appear in Hokkaido Math. J.

[22] Okabe, Y., to appear in Prospect of Algebraic Analysis, Academic Press, 1988

[23] Okabe, Y., in preparation

[24] Okabe, Y & Y. Nakano, in preparation

[25] K. Oobayashi, T. Kohno & H. Utiyama. Phys. Rev. **A27** (1983) 2632-2641

[26] G. C. Stokes, Mathematical and Physical Papers (1966). **Vol. 3**, p.p. 1-141 [reprinted from Trans. Camb. Phil. Soc. **9** (1850)]

相転移の統一理論
—超有効場理論とコヒーレント異常法—

東大・理 鈴 木 増 雄

1. はじめに

この報告では，超有効場理論とコヒーレント異常法[1-24]の要点を，式をなるべく使わずに概念的な面に重点を置いて解説する。

相転移の理論的研究は古く前世紀から始まる。その中で最も有名なものは，ファンデルワー

ルスの気相・液相の理論であろう(1887年)。これは一種の平均場近似の理論である。はっきりと平均場の概念を導入した最初の理論はワイスの平均場近似である。[25] これは，よく知られているように，無限の自由度の系を一つの自由度に置き換える近似である。無視した自由度の効果は，その残った一つの自由度に働く平均場として取り入れる。非線型効果は，この平均場を通してとり込むことができるが，ゆらぎの効果は全然入らない。相転移・特に臨界現象にとっては，非線型性とゆらぎの絡み合いが本質的である。このゆらぎをとり入れた最初の理論はベーテ[26] によって提出された。これは，ベーテ近似と呼ばれ，いくつかの自由度に関してはゆらぎを許し，正しく統計力学的に計算する近似である。しかし，数学的には無限自由度を数個に置きかえても，一個に置きかえる場合と同じく，古典的な臨界的振舞(例えば，帯磁率のキュリーワイス則等)しか得られない。

そのため，平均場近似は，相転移の真の様子を研究するには役立たないものと長い間思われていた。この報告では，そのような見方は正しくないことを指摘し，平均場近似の欠点を救いむしろ，平均場近似こそ，相転移研究の王道であり，現代的な意味においても，最も有効な方法であることを概念的に示したい。

2. 平均場近似と無限操作

よく知られているように，相転移は，無限大の粒子数で初めて起るものである。このように熱力学的極限をとって初めて数学的な異常が現れる。すなわち，自発的対称性の破れが起るのである。したがって，平均場近似も何らかの意味で，この熱力学的極限操作に相当するものを含んでいるはずである。実際，セルフコンシステントな条件は，この操作に対応している。[23] フィードバックの効果は，無限の摂動を系統的にとり入れたものと解釈することもできる。[24] こうして，部分和をとったものを一つの近似とみると，漸化式が得られ，その漸化式の固定点関数として，平均場近似の応答関数が与えられることになる。[23]

3. くりこみ群の理論 [27]

ウィルソンのくり込み群の理論の本質は，ゆらぎをハミルトニアンの漸化式の形でとり入れそのスケール変換の性質から，臨界指数と相転移点を求めることにある。具体的にくり込み漸化式を求めるには，ガウシャンの固定点からの摂動展開($\varepsilon \equiv 4-d$ 展開)を行う。したがってくり込み群の大きな功績の一つは，臨界現象を摂動計算という弱結合の極限から調べて行くことが出来ることを示した点にある。[27] ファイマングラフ展開が臨界現象の研究に利用できること

がわかって急激にその研究が進展した。

4. 強結合理論としての平均場近似

一方，平均場近似は強結合の極限に当たる。どの粒子とも結合した系，すなわち，長距離相互作用の系では平均場近似は厳密に成立することが知られている。その結果，ゆらぎの効果が入らない。平均場近似を拡張して，ゆらぎをとり入れるには，ベーテ近似のようにクラスター平均場近似を作ればよい。クラスター内の相互作用は，正確に考慮する。クラスターのサイズを大きくするにつれて大きなゆらぎをとり入れることができる。こうして大きなサイズのクラスター平均場近似を行えばそれだけ良い近似になるものと期待される。しかし，臨界指数は常に古典的になってしまう。

5. クラスター平均場近似とコヒーレント異常

ここで思考実験をしてみよう。これは閃きへの道すじとして最も重要なものの一つである。[29] クラスター平均場を一般的に考えることにする。クラスターのサイズを大きくしていくとき，近似的に求めた相転移温度 T_c は，いくらでも，正しい転移点 T_c^* に近づく。ところで，応答関数，例えば帯磁率の臨界指数は古典的な値のままである。クラスターのサイズを無限大にしたときには，厳密な結果になるはずである。それでは，どこから真の様子が見えてくるのであろうか。サイズが無限大になったとたんに，その真の臨界的な振舞が現れるのであろうか。それはあまりにも不自然である。途中から，フラクショナルな臨界指数の徴候が見えてくるはずである。どんなところにその徴候が見えるのであろうか。この思考実験は次のような閃きを与えてくれる。応答関数を近似的な相転移点 T_c の近傍でスケルトナイズして，[10] 古典的な異常性が露わに見えるようにする。そのときの係数（数学的には留数）に着目する。これを平均場臨界係数と呼ぶことにする。これは，近似が良くなるにつれて，異常に大きくなったり，零に近づいたりするはずである。これを「コヒーレント異常」と呼ぶ。このコヒーレント異常を調べることによって，真の臨界的な振舞がわかる。この方法を「コヒーレント異常法（CAM）」という。このコヒーレント異常と真の臨界指数との間の関係は，包絡線の理論 [4] を用いたり，スケーリング関係式 [5] を援用して導かれる。すなわち，古典的な臨界指数を φ_0，真の臨界指数を φ とすると，その差 $(\varphi - \varphi_0)$ が，コヒーレント異常の指数 ψ によって与えられる。すなわち $\varphi = \varphi_0 + \psi$ となる。この関係式が「コヒーレント異常法」の基本の式である。

6. コヒーレント異常と固有なゆらぎ

古典的な異常性は，分岐の仕方から必然的に現れるものであり，固有なゆらぎに基づくものではない。真の臨界指数は，一般にフラクショナルなものであり，古典的な値からのずれは，固有なゆらぎの効果を表わす。したがって，このずれを求めるということは，固有なゆらぎを評価するということに他ならない。この意味で，コヒーレント異常法は，協力現象の固有なゆらぎを調べる一般的な方法である。すなわち，これは，ゆらぎの一般的な研究方法を提供するものである。しかも，この方法は，平衡系だけでなく，非平衡系にも一般に適用できるし，古典力学系だけでなく，量子系にも使えるものであり，大変強力な方法である。固有なゆらぎには，いろいな要素があるが，コヒーレント異常法は，それらを系統的に取り扱う手段を与える。

7. 久保公式[30]によるコヒーレント異常の評価

具体的にコヒーレント異常を調べ，その指数ψを評価するには，一般化されたクラスター平均場近似を作り，久保の線型応答理論を適用して，応答関数を求め，それをスケルトナイズして，古典的な漸近形を露わに計算し，その留数，すなわち，平均場臨界係数を各近似ごとに求める。これより，ψが評価できる。[4),5)]

8. コヒーレント異常法のメリット

以上のように，コヒーレント異常法は，最もわかり易い平均場近似を基礎にしているため，大変物理的であり，現象の本質が摑み易い。しかも，平均場臨界係数が近似的な転移温度すなわち，「近似の度合」の関数としていくらでも精度良く求められる点が，この方法の最大の強みである。実際，応答関数そのものが，温度Tの関数として，高精度で求められるのであればその異常性は，非常に良い近似で評価できることになる。それは，極めて大きな系を莫大な量のモンテカルロ計算でもしなければ不可能である。コヒーレント異常法は，古典的な異常性を除いた残りの固有な異常性を高精度で評価する強力な方法になっている。

また，コヒーレント異常法の考え方は，方法論としても，極めて一般なものを含んでおり，協力現象一般の研究に大きな示唆を与えるものと期待される。実際，後で述べるように，CAMの拡張はいくらでも可能である。

コヒーレント異常法の最大の功績の一つは，平均場近似の復権であろう。今までは，結果は信頼できないが，仮りに平均場近似でやるとこうなるという，いい加減な話でお茶を濁していた場合が多い。CAM理論（すなわち，コヒーレント異常法の理論）によれば，いくつかの系統的な平均場近似列を作ることによって，その結果の信頼度まで議論できる。すなわち，充分な近似列を作ることによって，充分高い精度で真の相転移点や臨界指数等を評価することができる。

9. コヒーレント異常法とくり込み群の方法との関係

前にも述べた通り，くり込み群の理論では，ハミルトニアンの形でゆらぎを徐々に取り込み漸化式を作り，スケール変換の式から臨界指数を求める。その際，具体的にくり込み変換式を作るには，古典的な極限（φ^4理論では4次元）からの展開を行う。この意味では，くり込み群の方法も，固有なゆらぎの部分を調べる近似法である。しかし，くり込み群の方法，特に$\varepsilon(=4-d)$展開では，古典系からの摂動展開を行っていることになり，しかも，その展開は一般に（収束半径が零の）収束しない漸近展開である。それに対して，CAM 理論では一般に収束する近似例（カノニカルな近似列）を利用する点で大きな質的な違いがある。しかも，近似列全体で一つの臨界指数が決まる点でも，くり込み群の方法とは異なる。

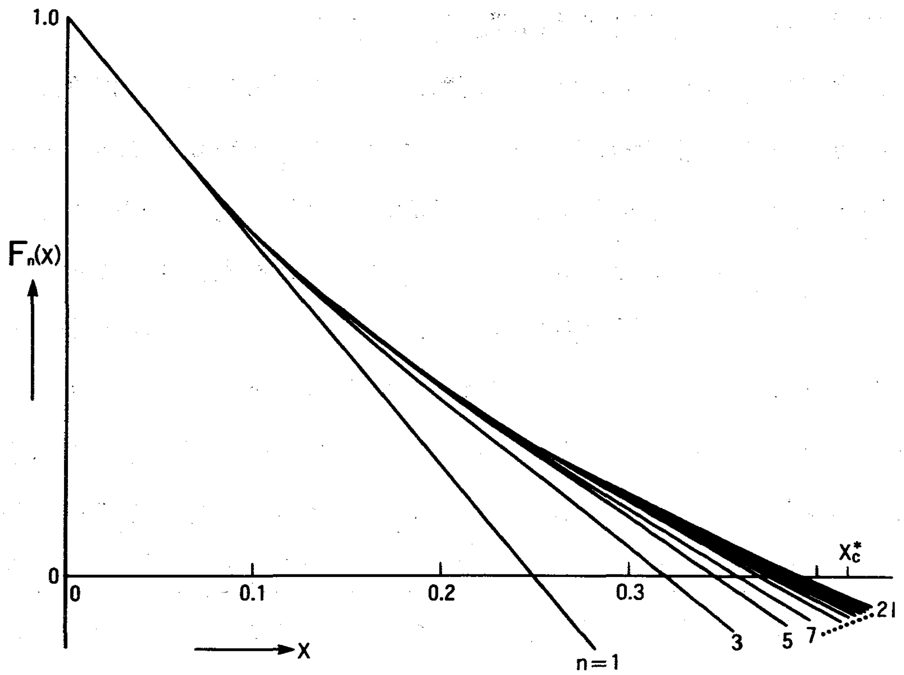
しかし，いずれもゆらぎを徐々にとり入れる点では類似しており，互に深い関係がある。

10. 級数CAM理論[12)]

一たび，コヒーレント異常法のアイデアが会得できれば，今までの相転移の研究方法を見直すことによって，その欠点を取り除き，新しい息吹きを与えることができる。

例えば，今まで，帯磁率のような応答関数を高温展開で十数次まで求め，それに ratio method（比の方法）やパデ近似を適用して，相転移点と臨界指数を求めることがよく行われていたが，級数展開を利用する最も初期の方法は，応答関数の逆数の零点を求める方法であった。この方法は，オペコフスキー展開に対しては，久保，小幡，大野によって試みられたし，フィッシャーの講義録にも詳しく解説されている。しかし，フィッシャーも強調しているように，この逆数の方法は，相転移点を調べるのには利用できるが，臨界指数の研究には無力であると今まで長い間思われていた。しかし，この逆数の零点は，一般に一位の零点であり，したがって，もとの応答関数は，一位の極を持つことになる。これは古典的な臨界振舞であることに気づくと，この方法もCAMと組み合わせれば，現代的な意味での臨界現象の研究にも極めて有効であることがわかる。[12)] すなわち，一位の極だけでなく，そこでの留数に着目すればよいのである。何十年間も，このことに気づかなかったのは不思議な位である。何事も気づいた後ではごく当り前のことになってしまう。

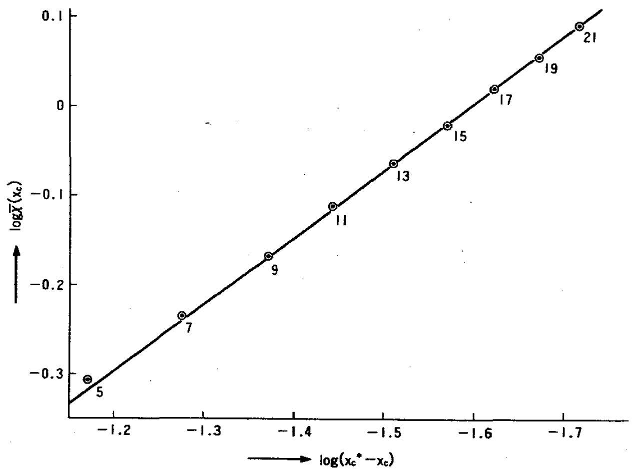
実際に，2次元イジングモデルの帯磁率を$x=\tanh(J/k_BT)$（Jは相互作用の強さ）で21次まで展開した結果を，1次まで，3次まで，… と各奇数次までで切って逆数をプロットすると第1図のように見事なコヒーレント異常が現れていることがわかる。これをもっとはっきりと見るには，第2図のようにたて軸に留数の対数を，よこ軸に近似の度合$(x_c^*-x_c)$の対数をプロットすればよい。この傾きから帯磁率の臨界指数γが$\gamma=1.75=7/4$であることが4ケタ



第１図　応答関数の n 次近似の逆数 $F_n(x)$ の n-依存性[17]
（２次元イジングモデルの帯磁率の例）

位の精度で結論される。

この級数CAM理論は，摂動展開を平均場近似の立場から見直して，真の臨界現象に迫るという点で大変興味深い。その他の応用例については近く公表する予定である。



第２図　コヒーレント異常の例。留数の対数と近似の度合の対数。[11]

11.　連分数ＣＡＭ理論[13]

応答関数は，しばしば森理論[31]のように連分数で与えられることも多い。これも，通常有限次までしか求めることが出来ないので，そのような近似列から，真の漸近形を評価する必要に迫られる。そのときにはCAM理論のアイデアを適用すればよい。それが連分数CAM理論である。[13] 一般には，級数CAMよりも連分数CAMの方が収束が速いようである。[13] 具体的な応用例については原論文[32]を参照して頂きたい。

12.　超有効場理論[21], [22]

以上説明したCAM理論によると，平均場近似が系統的に作れれば，その系の真の臨界現象を究明できることになる。それでは，どんな相転移に対しても，系統的な平均場近似が作れる

であろうか。この間に答えるのが超有効場理論[21),22)]である。

今までの平均場近似は，ハミルトニアンの切断によって作られることが多かった。ワイスの平均場近似，超伝導のBCS近似等皆そうである。スピングラスやカイラルオーダーのようなエキゾティックな相転移では，ハミルトニアンの切断による分子場近似は作れない。

今までのスピングラスの平均場理論は，すべてのスピンと相互作用している長距離相互作用のモデル，いわゆるSKモデルの解を指しており，これは，ワイスの平均場近似と等価な厳密に解けるモデルという数学的な意味を持つだけで，現実のスピングラスの本質がこれでわかるということにはならない。CAMの思想で言えば，たまたま一つだけ平均場近似が作れても，その系の真の臨界的振舞は知ることは出来ない。我々にとって今必要なのは，現実の系の厳密解にいくらでも近づき得る系統的（コヒーレント）な平均場近似を作ることである。

カイラルオーダーに対する平均場理論は今まで無かったので，それに対する必要性は言うまでもなかろう。

もっと一般に，ハミルトニアンもない系の非平衡系の漸近形を研究するための平均場理論はどのようにして作ったらよいであろうか。例えば，パーコレーションの問題等では，それを記述するハミルトニアンは作れそうもない。それでも，この問題に対する有効場を作り，CAMを応用して，その漸近形を知りたい。

さて，そこで，上のようにハミルトニアンの切断から平均場近似を作るという固定観念，呪縛から解放されて，可能な秩序パラメーターとそれに共役な有効場を任意のクラスターに導入し，その有効場を適当にセルフコンシステントに決めることにしよう。[22)]一たびこのように，一般的な有効場の導入に気がつけば，スピングラスやカイラルオーダーの平均場理論を系統的に作ることが可能となる。そこで，このような有効場理論を「超有効場理論（super-effective-field theory)」と呼ぶことにする。[22)]

スピングラス，カイラルオーダーその他に対する具体的な応用については原論文[22),23)]を参照して頂きたい。ここでは，結果のみ簡単にふれる。3次元$\pm J$イジングスピングラスモデルでは，$T_{\rm sg} \simeq 1.2\,J/k_{\rm B}$，$\gamma_{\rm s} \simeq 2.9$（非線型帯磁率の臨界指数）が3つの超有効場近似列を用いて求まった。[22)]また，2次元3角格子反強磁性量子XY模型では有限温度でカイラルオーダーが現れることが超有効場理論を用いて示された。[22),34)]

超有効場理論の一般的な詳しい作り方については文献22)を参照して頂きたい。

13. 超平均場理論 ― CAMと超有効場理論の統合 ―

以上のように，超有効場理論によって，エキゾティックな相転移にまで有効場近似が拡張さ

れ，超有効場近似列が系統的に作れると，それにCAMを適用すれば，その系の真の相転移，臨界現象に迫ることができる。この二つの理論を一諸にして「超平均場理論」と呼ぶことができるであろう。

14. 相転移の統一理論とは，何と何の統一か？

相転移の一般論と言えば，まずランダウ[35]の現象論を思い浮かべる人が多いであろう。しかし，これは古典的な臨界的振舞しか説明できない。それに対して，次にウィルソンのくり込み群の理論をあげることができるが，これは前にふれたので，ここではくり返さないことにする。相転移の統一理論と言うと，何と何との統一かが問題になるであろう。それにもいろいろな立場があり得る。

a）古典的な理論（ワイスの平均場近似やランダウ理論）と非古典的な臨界現象に関する理論との統一。

この観点からすると，「コヒーレント異常法（CAM）」は正しく統一理論になっている。CAMは，古典的な平均場近似に立脚しながら，非古典的な振舞を究明できる方法であるからである。言い換えれば，両者を一つの方法で解明できるのがCAMである。

b）通常の相転移とエキゾティックな相転移を統一的に扱う方法としての統一理論

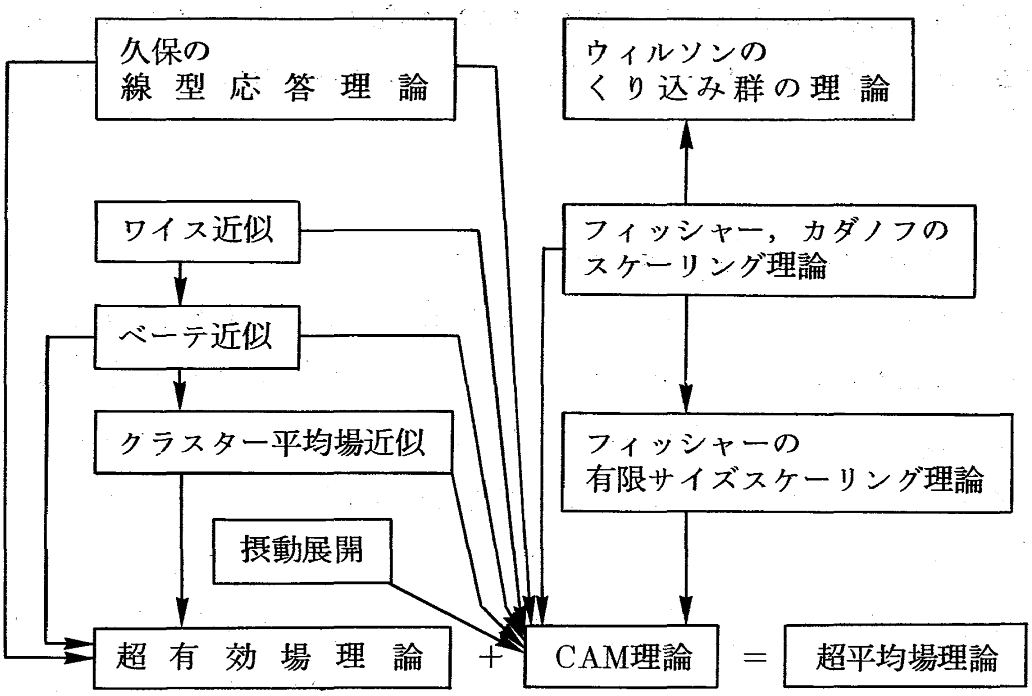
この観点からすると，「超有効場CAM理論≡超平均場理論」が正しく統一理論になっている。

c）切断近似と摂動展開との統一。

摂動展開は，高温展開（$J/k_{\mathrm{B}}T$ の展開）のように弱結合理論である。一方，切断近似はある意味で強結合理論である。しかし，弱結合展開でも全部まとめて解析接続したものを考えれば強結合理論につながるはずである。したがって，両者はまとめて一つの方法で扱えるはずである。CAM理論はそれに対する統一的な処法箋を与えている。[23]

d）久保の線型応答理論とフィッシャーの有限サイズスケーリング理論との統合

CAM理論は，近似という立場から見るとワイス近似，ベーテ近似，クラスター平均場近似の統合ということになるし，概念的には，ゆらぎの理論の統合という意味を持っている。久保理論は，ゆらぎを一般的に捉えるワク組み・方法論を提供し，フィッシャーの理論は，協力現象の漸近形に対する有限系の影響を扱う現象論である。CAM理論は，始めから無限系を扱い，実際の計算としては，有限系の応答（線型から非線型まで）を求めることになる。この意味で第3図に示すように，超有効場CAM理論は，久保理論とフィッシャーの理論の統合によってゆらぎを一般的に，しかも具体的に求め，真の漸近形を評価し得る「ゆらぎの一般論」になっているものと確信している。



第3図　ゆらぎの理論の系統図

15. 結び

以上，CAMと超有効場理論の概念的な解説を行ったが，実際に応用するには，詳しい定式化が必要である。それに関しては，原論文[1-24]を参照して頂きたい。

参考文献

1）鈴木増雄，「相転移の統一理論に向けて ── 超有効場理論とCAM──」数理科学，第26巻7号（1988），特集号『相転移のルネサンス』

2）鈴木増雄，固体物理 **Vol23**, №6（1988）33.

3）鈴木増雄，「スピン系のエキゾティックな秩序 ── 超有効場理論とコヒーレント異常法──」『物性物理の新概念』（培風館，福山秀俊編， 1988）.

4）M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 4205. See also M. Suzuki, Phys. Lett. **116A** (1986) 375, and *Quantum Field Theory* (Proc. Int. Symp. Positano, Salerno, Italy, June 5-7, 1985) ed. F. Mancini (North-Holland, Amsterdam, 1986).

5）M. Suzuki, M. Katori and X. Hu, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3092.

6）M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3113. See also M. Suzuki and M. Katori, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 1.

7）X. Hu, M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3865.

8) X. Hu and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 791.

9) M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 807.

10) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. suppl. **87** (1986) 1.

11) M. Suzuki, Phys. Lett. **127A** (1988) 410.

12) M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 4221.

13) M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 1.

14) N. Ito and M. Suzuki, Int. J. Modern Phys. **B2** (1988) 1.

15) T. Oguchi and H. Kitatani, to be published.

16) M. Takayasu and H. Takayasu, Phys. Lett. **128A** (1988) 45.

17) M. Suzuki, J. Stat. Phys. (1988).

18) M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. (1988).

19) X. Hu and M. Suzuki, Physica **150A** (1988) 310.

20) J. L. Monroe, Phys. Lett. **A** (1988).

21) M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 683.

22) M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 2310.

23) M. Suzuki, *Science in Form* (1988).

24) M. Suzuki, J. de Physique, Dec. (1988)(磁気国際会議招待講演).

25) P. Weiss, J. Phys. Redium **6** (1907) 661.

26) H. A. Bethe, Proc. R. Soc. London **A150** (1935) 552.

27) K. G. Wilson, Phys. Rev. **B4** (1971) 3174, 3184.

28) C. Domb and M. S. Green, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, 第6巻.

29) 鈴木増雄, 数理科学 **No.295** (1988) 16.

30) R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **12** (1957) 570.

31) H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423; ibid **34** (1965) 399.

32) 準備中,(J. Phys. Soc. Jpn に投稿予定).

33) M. Suzuki et al. 準備中.

34) 準備中.

35) L. D. Landau, Phys. Zurn Sowjetunion **11** (1937) 26, 545.