格子ロトカボルテラ系におけるトポロジカルな defects

茨城大学理学部　泰中啓一

Ⅰ．序論

生物種のなわばりパターンの研究についてはたくさんの文献がある。本研究は、トポロジカルな格子欠陥の視点からこの問題を取り扱う。生態系における生存競争の問題に対する典型的な例としてロトカ・ボルテラモデルがある。このモデルは補食者ー被食者の個体数の変動をうまく説明することが出来る。

ロトカ・ボルテラモデルは次のような気体モデルとしてとらえ直すことができる。気体を構成する粒子は３つの種（生物種）のうち１つであり、粒子間の衝突によって次のような反応が起きる。種ｉとｊの粒子が衝突するとき（$i \geq j$、i、$j = 1$、２、３）、もし$i - j = 0$、１のときは両粒子ともｉになり、またもし$i - j = 2$ のときそれらはｊになる。このように種間の強弱関係は〝じゃんけん〟のときのように互いに対等であり、循環的とする。この気体系における種ｉの粒子数（密度）n_i は

$$\frac{dn_i}{dt} = cn_i(n_{i-1} - n_{i+1})\text{、}\qquad (1)$$

で表される。ここで$n_{i+3} = n_i$でありＣは定数である。この解は center と呼ばれ、$n_i(t)$の変動は初期条件に従って振動する。（１）式はロトカ・ボルテラモデルと呼ばれる。

Ⅱ．格子ロトカ・ボルテラ（ＬＬＶ）系

本研究はこのモデルを格子系に適用した。すなわち、格子上に粒子を配置し、衝突は最近接格子とだけ起きるものと仮定した。我々の格子モデルでは空格子を定義しなかった。空格子がないことがあとで述べるトポロジカルな defect の導入に役立つことになる。衝突のルールはロトカ・ボルテラモデルと同じものとする。時間発展は、ランダムに衝突させることによって行い、時間の単位はモンテカルロステップ（ＭＣ）とする。衝突が全格子数（Ｍ）回起きたとき１ＭＣとす

る。なお境界条件は周期的境界条件を適用した。

この格子ロトカ・ボルテラ（ＬＬＶ）系に対するシミュレーションの結果は空間の次元ｄに強く依存することがわかった。はじめにｄ＝１のときを調べる。初期条件はランダムに選ぶ。この系の時間発展は簡単にいえば〝ドメイン〟数の減少ということができる。ここでドメインというのは同種粒子が占める領域（なわばり）として定義する。ドメイン数ｎの時間発展は図１のようになり、

$$n \propto t^{-\alpha} \qquad (2)$$

で近似できる。αは初期条件によって決まっていて、（n_1：n_2：n_3）が（１：１：１）のとき（図１上の曲線）、α～０．８となり、また（７：２：１）のとき　α～１．２となった。

ｄ＝２のとき正方格子に対してシュレーションを行った。その結果最終的にはある定常状態が存在することがわかった。図２、３は、平均ドメイン面積（Ａ）とドメイン数（Ｄ）の時間変化を示している。３本の線は初期条件の違いを表している。初期条件として、ａとｃはランダムに粒子が分布した場合でありｂは三色旗のような分布を仮定した。ａとｃの違いは粒子数の違いでありａは（n_1：n_2：n_3）が（１：１：１）の場合であり、ｃは（４５：３；２）のときである。図２、３から定常状態の存在が確認できる。定常状態のパターンは文献１に示されているように時間とともに大きく変化する。定常状態（$t\to\infty$）では

$$A \sim 9.5 \quad , \quad D \sim 0.27$$

が得られた。

Ⅲ．　トポロジカルな乱れ

前節でのべたＬＬＶ系の動力学を取り扱うことは、たいへん複雑でありむつかしい。なぜなら前格子数Ｍが大きいためである。全系はいくつかのドメインに分かれるが、おのおののドメインの中の粒子は反応しなくてドメインの境界にいる粒子だけが反応する。この事実から、ｄ＝１のときはドメインの境界を新たに粒子（欠陥、defect）と考えることにする。この考えは一次元 Isingスピンのとき

の〝kink″と同じものである。この defect には２種類（ＡとＢ）あって、Ａは右に進み、Ｂは左に進む粒子である。これらの defect は衝突によって次のように反応する。

$$\begin{aligned} A + B &\rightarrow \phi \\ A + A &\rightarrow B \\ B + B &\rightarrow A \end{aligned} \qquad (3)$$

次にｄ＝２の場合を考える。トポロジカルな乱れとしては、次のような渦（vortex）を考えるのがよい。渦は図４のように３つの異なるドメインの境界点として定義される。渦点のまわりを三種のドメインが回転する。回転方向によって渦は２種類（V_AとV_B）存在する。それらは複雑に動き回り、次のように反応する。

$$V_A + V_B \rightleftarrows \phi \quad , \qquad (4)$$

このように渦点は生成、消滅するが、V_AとV_B の数はどんな場合でも常に等しくなる（粒子数の保存則）。

ｄ＝３のときは渦糸が defect として定義される。すべての渦糸は閉じており、また 回転の方向を持っている。渦輪（渦系の輪）は大きくなったり、また他の輪との相互作用を行うこともある。いずれにせよ渦輪がその形を変えるときには必ず、単位渦輪（U_R）の生成かまたは消滅が起こっている。

$$U_R \rightleftarrows \phi \quad , \qquad (5)$$

ここでU_Rは１辺が格子サイズの最も小さい渦輪である。格子が立方格子のときはU_Rは正方形の輪である。例として図５には渦輪の消滅課程を示した。ここで（ａ）、（ｂ）は収縮および相互交叉過程を表している。図５の（ａ）、（ｂ）両プロセスにおいて右回り（時計回り）のU_Rが消滅していることが理解できる。ただし、点線は互いに反対方向を向いた defects の和と考えるものとする。

Ⅳ.　トポロジカルな defect の時間発展

ＬＬＶ系の時間発展は、 defect の考えを導入することによって理解できる。ｄ＝１のときは（３）の反応式から defect 数は単調に減少することがわかる。有限な１次元系においては最終的には defect のない状態、つまり１種類が全系を占めるようになる。ｄ＝２，３においては（４）、（５）から defect 数が有限となる定常状態が存在することが容易に理解できる。定量的な検討のため平均場近似（ＭＦＡ）をはじめに行ってみる。（３）より

$$\dot{a} = -k\,(ab + a^2 - b^2) \qquad (6)$$
$$\dot{b} = -k\,(ab + b^2 - a^2)$$

を得る。ａ，ｂは defects Ａ，Ｂの数（密度）でありｋは定数である。（６）の解は $s = a - b$、$n = a + b$ としたときｓがすぐに ｏ になり、その後 ｎ が $n \propto t^{-\alpha}$、$\alpha = 1$（ＭＦＡ）に従って減少する。これは（２）の結果を比較的うまく説明する。

ｄ＝２のとき、平均場近似は、（４）と粒子数保存則から

$$\frac{dN_v}{dt} = -k_1 N_v^2 + k_2 \qquad (7)$$

となる。ここでN_vは渦の数であり、また渦対の生成速度k_2は定数とした。しかし実際のＬＬＶ系における渦の数N_vは図６のようになり、初期条件が$N_v \sim 0$のときには（７）式とはまったく異なる結果となった。

空間の次元が３次元（ｄ＝３）のときについても渦糸の全長Ｌ（ｔ）の変動を求めたところ図６と同じような結果を得た。ｄ＝２とｄ＝３のときの定常状態の defect のパターンを図７、８に表した。いずれの場合も、defect のまったくない領域（void）の存在が確認できる。

V. 議論

複雑なＬＬＶ系の運動は、defect を導入することによって比較的見通しがよくなった。しかしそれでも defects の動力学はまだよくわかっていない。平均場近似では定性的にはいいが、定量的には不十分なことが多い。もっときちんとした取扱が要求される。

渦糸系の order paramer についていえば、（５）式から単位渦輪（U_R）の数（N_U）がその資格をもつ。例えば図５（ａ）ではN_Uは減少しているが、渦糸の全長（Ｌ）は変化しない。図５（ａ）では order parameter は減少すべきと考える。この図では N_U は渦輪の面積に、Ｌは周に対応している。N_U の数え方は何通りもあるので、結局、全系の渦輪を構成するための U_R の最小数が本当の order parameter N_U であると考える。

最後に定常パターンについて議論する。定常パターンには、ｄ＝２，３のとき defect の存在しない void が生じた。この void 発生の原因は、defect の生成過程にあると考える。defect の発生速度は現存する defect の数（密度）に大きく依存する。 defect のない所には大きなドメインがあるため defect は生成できない。そのため比較的大きな void が出現することになるのであろう。このＬＬＶ系には、Kosterlitz-Thouless 型の相転移に対応する現象も見られる。図７、８はパソコンで描いたものであり、計算時間も比較的少ないことからＬＬＶ系は取扱容い系である。

文　献

１． K. Tainaka, J. Phys. Soc. Jpn, 57, 2588(1988).

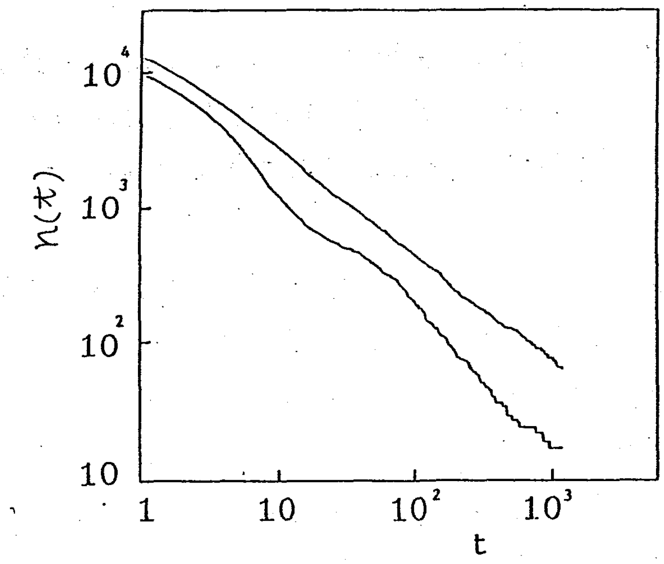

図１．　１次元ＬＬＶ系におけるダイナミックス（Ｍ＝４０、０００）。初期条件として上の曲線は（n_1：n_2：n_3）が（１：１：１）のときであり、下の曲線は（７：２：１）のときである。

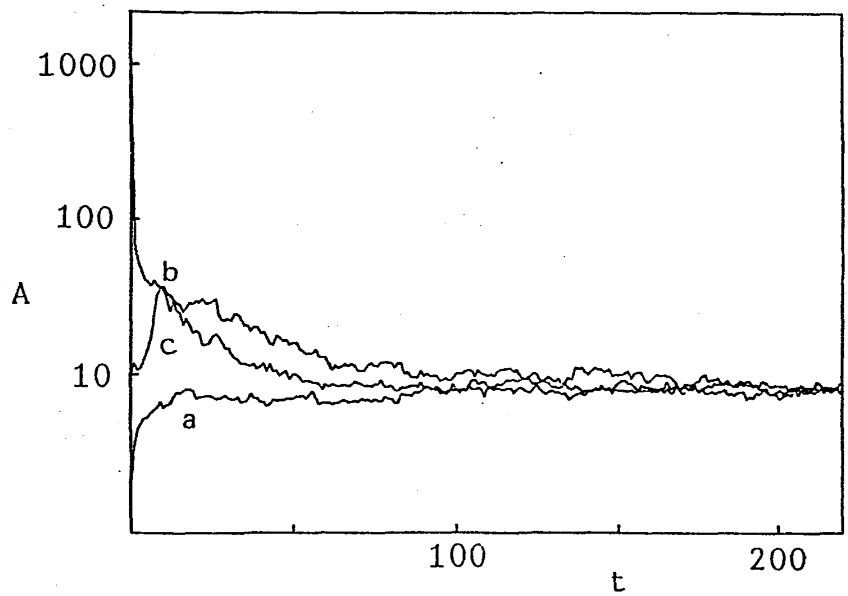

図２．　２次元ＬＬＶ系における、ドメイン当りの平均面積Ａ．図中ａ、ｂ、ｃ、は初期条件の違いを表している（Ｎ＝５０×５０）。

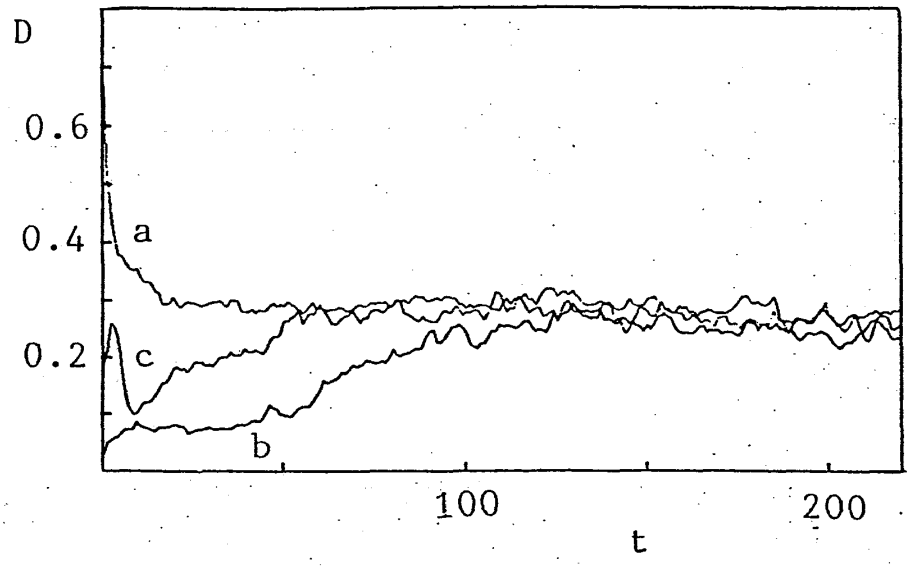

図3．ドメイン数（D）の変動。a、b、cは図2と同じ。

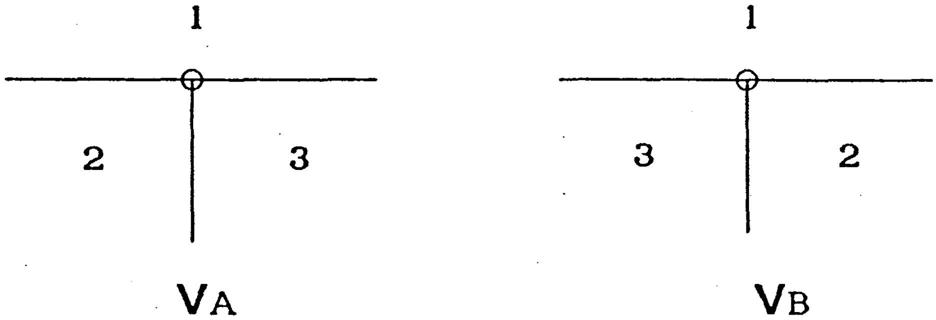

図4．２種類の渦。

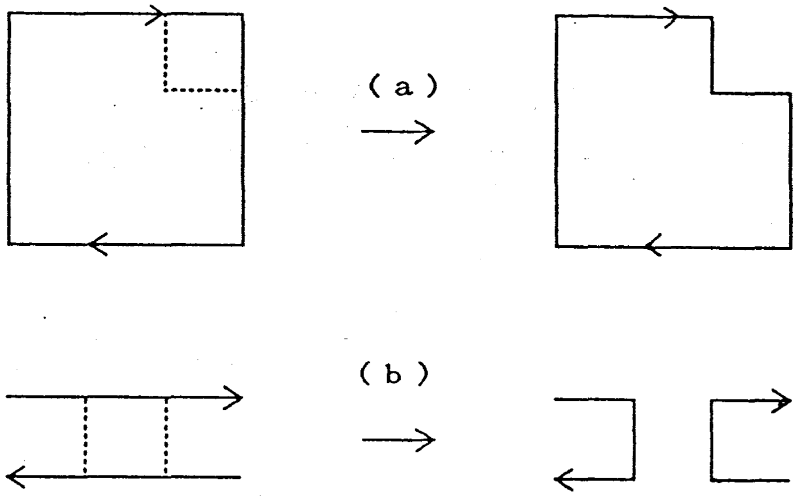

図5．渦糸の収縮（a）と相互交叉（b）の基本プロセス。実線は渦糸を表す。

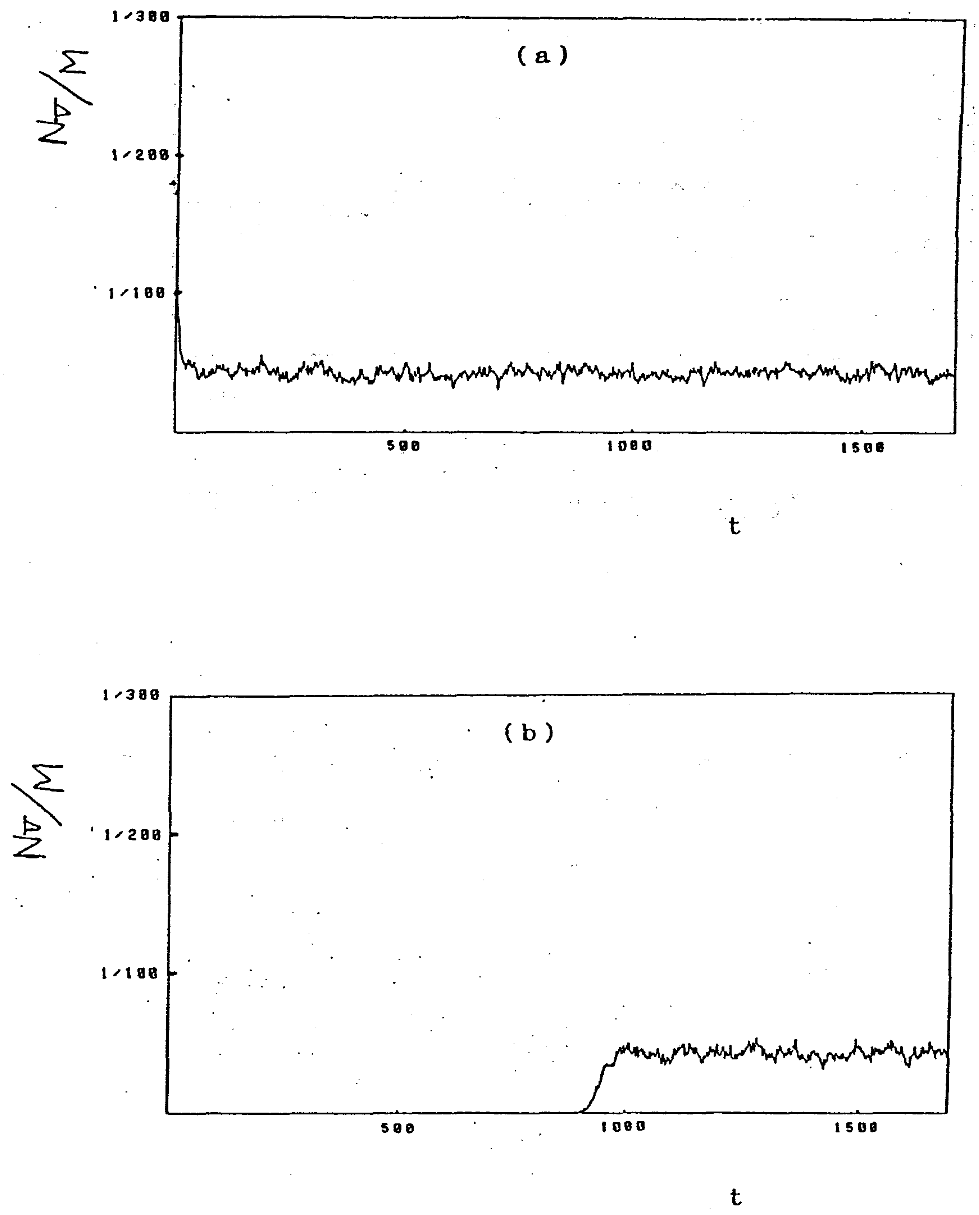

図６．２次元ＬＬＶ系における渦数 Ｎ$_v$（ｔ）の変動。（ａ）、（ｂ）は初期条件のちがいを表す。（ａ）ランダム（ｂ）三色旗として配置した。

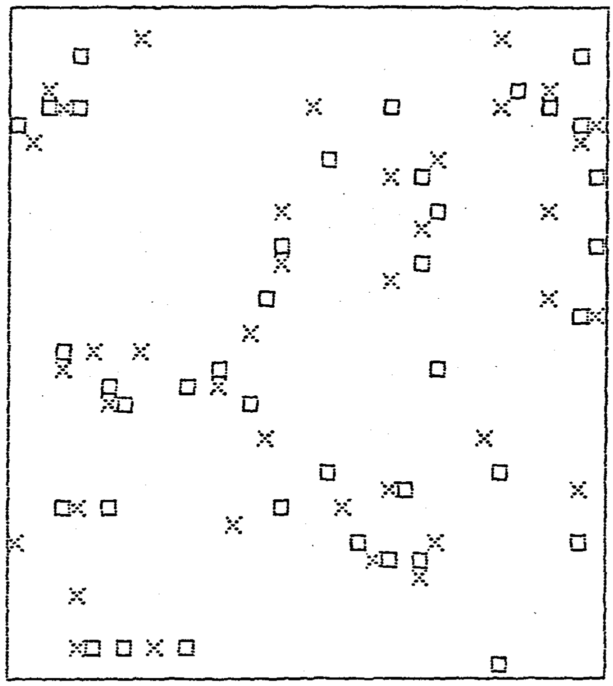

図７．定常状態（ｄ＝２）における渦点のパターン（　：V_A、Ｘ：V_B）。

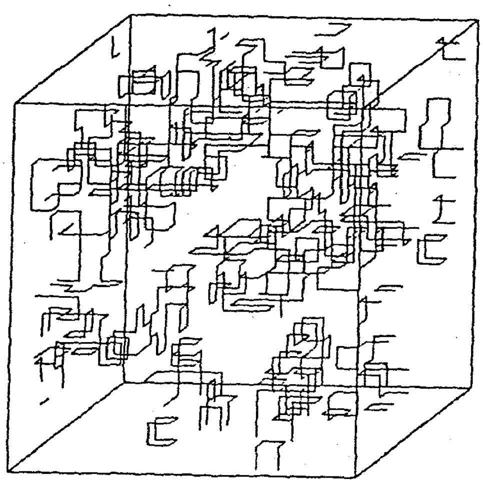

図８．３次元定常状態における渦輪のパターン。