異方性により樹枝状成長するヴィスカス・フィンガー

中大. 理工　　山田　英明、松下　貢

一本だけみぞをつけたヘル・ショウセルでヴィスカス・フィンガーの実験をおこなったところ、みぞにそって成長した枝は他の枝と違い先端が枝分かれせず、横枝を発生した。この枝の成長の仕組みは樹枝状結晶のそれと同じなので、この枝の成長速度や特徴的な長さを測定することによって、結晶成長の理論が正しいかどうか確かめることができる。

1．ヴィスカス・フィンガー

２枚の平行平板の間に流体をはさんだものをヘル・ショウセルという。いまヘル・ショウセル内に２種類の流体があったときの界面の不安定性について考えよう[1]。水平な厚さｂの隙間で流体１が流体２を押しているとする。粘性係数をそれぞれμ_1、μ_2とする。流れの速度をｖ、圧力をＰとする。それぞれの流体内でナビエ・ストークス方程式を解くと

$$\overline{v}_i = -\frac{b^2}{12\mu_i}\nabla P \quad (i=1,2). \ (1)$$

となる[2]。ここで￣は厚さ方向の平均である。
流体が縮まないとすると、連続の式から

$$\nabla \cdot \overline{v}_i = 0 \qquad (i=1,2). \ (2)$$

（1）に（2）を代入すると

$$\nabla P_i = 0 \qquad (i=1,2). \ (3)$$

つまり圧力場はラプラス場をみたす。

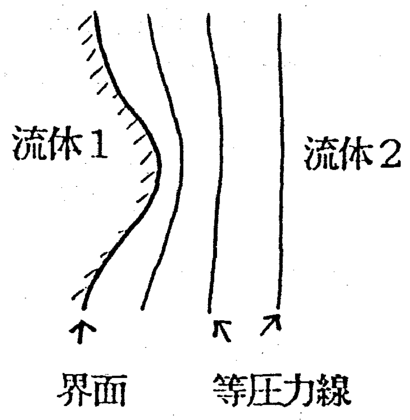


図１　等圧力線

界面の形は$\mu_1 > \mu_2$ ならば安定で　$\mu_1 < \mu_2$ ならば不安定である。このことは実験的にも理論的にも確かめられている[1),3)]。ここで$\mu_1 \ll \mu_2$ の単純な場合だけを考える。$\mu_1 = 0$とすれば　（1）式より　P_1　=CONSTとなり、流体２の圧力場だけを考えればよい。界面張力を考えなければ図１のようにゆらぎで一度でっぱうたところはさらにでっぱりやすくなる。圧力勾配が不安定化の原因であるのに対して界面張力は安定化の原因に成っている。

二流体界面では、界面張力γによって

$$\Delta P=\gamma\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right). \tag{4}$$

となる圧力のギャップがある。ここでρ_1 、ρ_2 はそれぞれ上から見たときと横から見たときの界面の形の曲率半径である。ρ_2 はどこでも一定とすれば、界面の成長はρ_1 だけにより二次元的な成長とみなせる。

2．結晶成長[4)]

ここでは融液成長と溶液成長だけを考える。どちらの場合も成長に関係する場は拡散場で

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\nabla^2 u. \tag{5}$$

ここでDは液体中の拡散係数でuは無次元化された温度または濃度である。次に結晶が速さvで定常成長しているとし、成長方向をz軸とする。z方向を速さvで動く座標に乗った拡散方程式は

$$\nabla^2 u+\frac{2}{l}\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{7}$$

ここで l は拡散長で

$$l=\frac{2D}{v}. \tag{8}$$

l より小さいスケールでは

$$\nabla^2 u=0. \tag{9}$$

とできる。

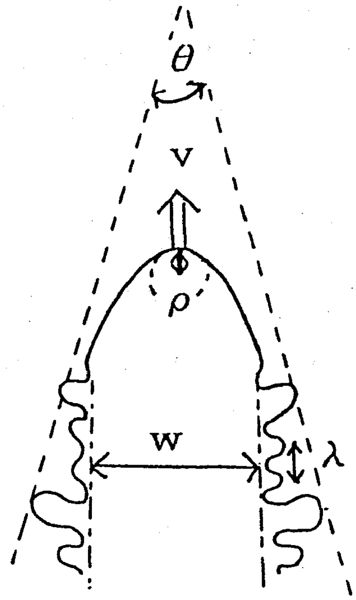


図２　樹枝状結晶

また連続の条件で、個体中の拡散を無視すると

$$v \;=-D\,(\nabla u)_{liquid}\cdot n. \tag{11}$$

ギブス・トムソンの条件は

$$u\ (\mathrm{sarface})=-d_{\circ}\,\kappa. \tag{12}$$

とかける。ここで$d_{\circ}$は毛管長、κは曲率である。

3．結晶成長の特徴[4)]

結晶成長の理論によると樹枝状結晶には次の特徴がある。

1．先端の形が放物線である。
2．$v\rho^2$ =const。
3．$\lambda \sim \rho$。
4．先端の形が安定であるためには異方性が必要である。

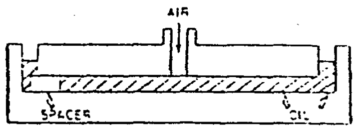


図3　ヘル・ショウセル

ここでv、ρ、λはそれぞれ先端の速さ、曲率半径、横枝の間隔である。結晶成長の式（9）、（11）、（12）はヴィスカス・フィンガーの式（3）、（1）、（4)に対応しており、異方性をとりいれればヴィスカス・フィンガーの成長の仕組の数学的形式は結晶成長と同じになる。したがってヴィスカス・フィンガーの実験から上の四つの性質が成り立っているかどうか、また成り立つとすればそれはどうしてかが解るだろう。

4．実験

実験に使用したセルは、上下板とも厚さ２ｃｍのアクリル板で、上板は縦９９ｃｍ横５９ｃｍ、下板は縦１００ｃｍ横６０ｃｍである（図３）。上板の真中には直径２ｍｍの穴が開けてあり、ここから空気を入れる。すき間の厚さは１ｍｍのスペーサーで一定に保ちシリコン・オイル（　①μ=9.70ｐ　、γ=21.2dyn/cm　　②μ=0.965ｐ、　γ=20.9dyn/cm　）を入れておく。このセルの一番の特徴は下板の真中から一方向に、幅０．４ｍｍ深さ０．１ｍｍのＶ字型のみぞが彫ってあることである。これによって異方性が取り入れられる。上板の穴から一定の圧力の空気を入れるとヴィスカス・フィンガーが成長するが、みぞに沿ってのびた枝は他の枝と違っていて、先端の形が放物線で安定し横枝を発生している（図４）。

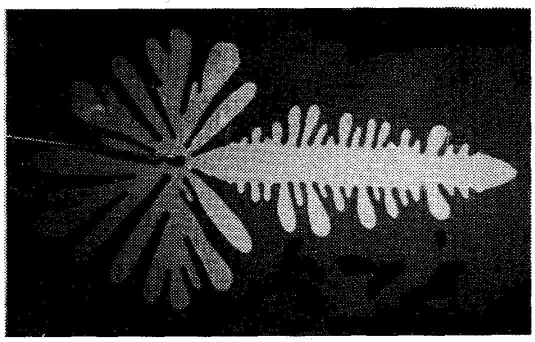


図４　樹枝状成長した
ヴィスカス・フィンガー

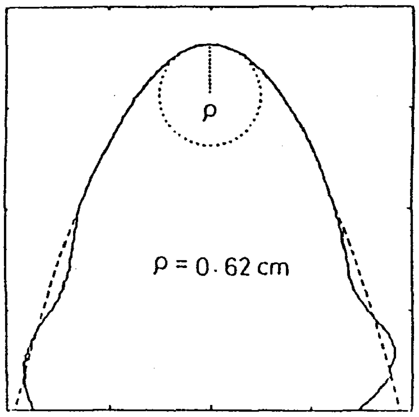


図5　ｆｉｔｔｉｎｇ

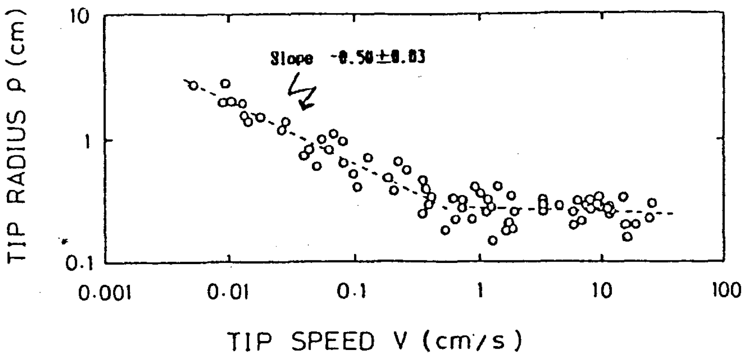


図6　ｖ－ρグラフ

4．結果と議論

先端の写真に放物線をFITTINGさせて曲率半径を決定する（図5）。①のシリコン・オイルでｖ、ρ、λなどを計ったら図6、7のようになった。ｖとρの関係はある速度v_cまでは樹枝状結晶の性質２と一致したがv_c以上ではρはほぼ一定になってしまった。この原因は圧力のギャップ△Ｐに平衡状態での式（4）をそのまま使ったことにある。Ｐａｒｋ とＨｏｍｓｙの理論によると低粘性流体が壁をぬらす高粘性流体を押しているとき、圧力のギャップ△Ｐは次の式で与えられる[5]。

$$\Delta P = \frac{\gamma}{b/2}\left\{1 + 3.80\left(\frac{\mu V}{\gamma}\right)^{2/3}\right\} + \frac{\pi}{4}\frac{\gamma}{\rho_1} . \quad (13)$$

この式によれば圧力のギャップは界面の曲率半径だけでなく速さにもよることがわかる。かっこ内の第二項が無視できればいままでの議論でよい。第二項が効いてくるのは第一項以上に成るところだと考えられるので、両者を等しいと置くと

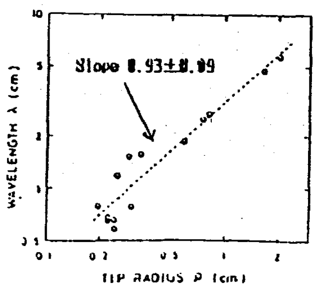
$$v_c = \frac{\gamma}{\mu}\left(\frac{1}{3.80}\right)^{2/3} . \quad (14)$$

となり。①のオイルの場合 v_c ＝0.3cm/sでグラフのクロスオーバーの所の速度に近い。②のオイルでも同様の結果が出た。

また横枝の間隔λは速度vに関係なく半径ρに比例していた。しかし主幹の太さwはvに比例していなかった（図8）。これは曲率半径が決るのと横枝が発生するときは非平衡状態であるのに対して、主幹の太さにはその後の平衡状態への復帰が無視できないためであろう。この実験の場合、結晶成長の場合と違って主幹に垂直な方向には異方性がない。また注入する空気の圧力を変化させて先端の速度を振動させると横枝は左右対称に発生した（図9）。これらのことから速度が一定のときに発生した横枝は先端付近の揺らぎが拡大されたものと思われる。

みぞを途中でとめると先端が不安定になって枝分かれした（図11）。したがって先端が安定であるためには異方性が必要であることが容易に確かめられた。結晶成長の場合と違ってこの実験では異方性はただ一本のみぞのみにある。それにもかかわらずそれに引っ張られた枝の先端が放物線であるのは興味深い。

横枝の先端を結んだ線のなす角度θはvとともに増加した（図12）。言い替えれば、注入する空気の圧力が大きいところほど横枝の成長速度が主幹の成長速度に近い。先端を結んだ包絡線は横枝とほぼ直角なので主幹とのなす角は速度が大きくなるほど小さくなっている。



λ＝Aρ

A＝3.4

図7　ρ－λグラフ

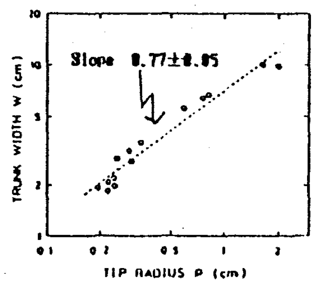


図8　ρ－wグラフ

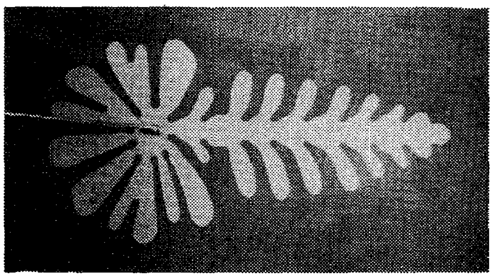


図9　振動成長

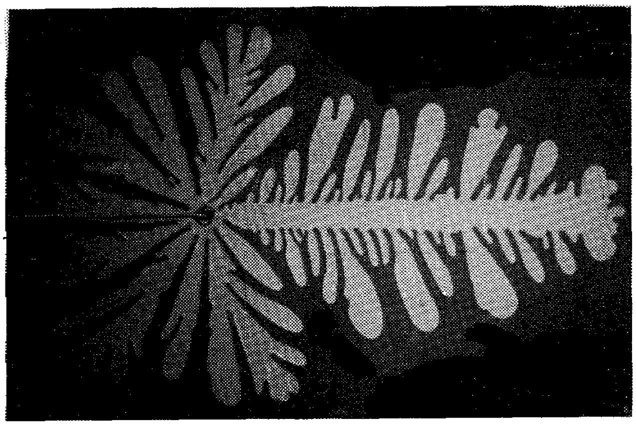


図１０　溝を留めた
ときの成長

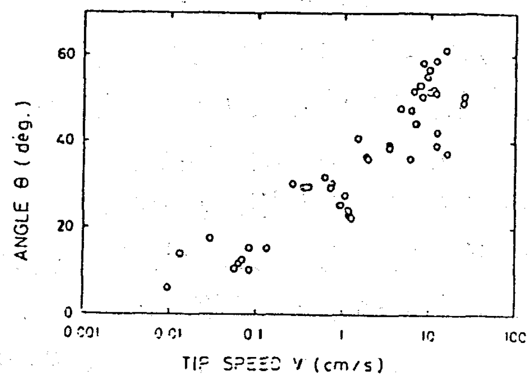


図１１　v－θグラフ

６．おわりに

界面のパターン形成の問題は強い非線形性がはいっているので、理論的に解くのはむずかしい。それに対してヴィスカス・フィンガーの実験は非常に簡単にできるので、この問題の議論に大いに役に立ちそうである。異方性が重要な役割をしていることがわかったので、これからの課題としてみぞをとめた後の不安定化の定量化が残っている。

参考文献

１）　Bensimon et al, Rev. Mod. Phys., 58, 977 (1986).

２）　例えば、ランダウ・リフシッツ、流体力学１（理論物理学教程、東京図書、1970）。

３）　J. Nittmann, G. Daccod and H. E. Stanley, in Fractals In Physics ed. S. Pietronero, E. Tosatti (Elsevier Science Publishers BV.,1986).

４）　J. S. Langer, Rev. Mod. Phys. 52, 1 (1980).

５）　C. -W. Park and G. M. Homsy J. Fluid. Mech. 139, 291 (1984).