

乱流のマルチフラクタル

東工大理 田口善弘
Boston大 高安秀樹

0. はじめに

いわゆる一様等方性乱流と言うものがある。これは、Navier-Stokes方程式（以下、N-S eq.と略記）の粘性ゼロの極限で出現する、最も普遍的な解であるにも関わらず、その構造自体が未だ不明解なままである。構造自体が不明解であっては、それを解明するための理論を作ることもできない。この報告では、乱流の特徴的な構造の一つである「エネルギー散逸領域の空間的間欠構造」について述べる。特に、最近流行のマルチフラクタルが、この空間的間欠構造の記述に有効であると言う実験が報告されているので[1]、この話題を中心にして述べる。更に、この事実に対する我々の解釈についても述べたいと思う。

1. ことの始まりとその後の発展[2]

乱流の空間構造について最初に定性的な記述を与えたのはRichardson[3]であった。彼は、乱流とは渦の階層構造であることに気付いた。つまり、外力によって引き起こされた大きな渦が、N-S eq.の非線形性によって、より小さな渦へと分解され、更に、その渦どうしの非線形相互作用によって、更に小さな渦が・・・、と無限に続く一種の「エネルギー・カスケード過程」そのものであるとしたのである。そして、もし、粘性が有限（ゼロでない）であれば、ある有限の大きさの渦でエネルギーが散逸し、カスケードが打ち切られる。

この定性的な記述に初めて定量的な記述を与えたのが、Kolmogorov[4]であった。彼は、一様等方性乱流においては「乱流は、一様、等方、定常であり、エネルギーの注入と散逸のバランスで成立する定常状態にある。」と仮定した。ここで、エネルギーの注入とは外力（流体が物体によってかき混ぜられること）を示し、散逸とは粘性による摩擦によってエネルギーが失われることである。そして、注入と散逸の中間となる大きさの渦では、散逸も注入もなく、カスケードのみが生じる。この仮定により有名なKolmogorovの $\frac{5}{3}$ 乗則が導かれる。以下にその導出をごく簡単に書いておこう。

まず、ここで言うエネルギーと言うものはあくまで、渦のエネルギーであることに気を付ける。よって、流体全体が一様に流れているとか言うような成分は除かなくてはならない。この目的のために距離 l だけ離れた地点間の速度差 $\delta v(l) \sim v(0) - v(l)$ を導入する。すると、ここで問題にしているエネルギー E は、 $E \sim [\delta v(l)]^2$ と表現される。次に、スケール l の渦の運動についての特徴的な時間 t について考えよう。これは、次元解析で考えると、 $t \sim l / \delta v(l)$ と表記されねばならない。よって、この単位時間当りにカスケードするエネルギーは $E/t \sim [\delta v(l)]^3 / l$ のオーダーであろう。ここで、Kolmogorovの仮定に従い、このカスケードするエネルギーの量はどの様なスケールでも一定であるとする。（さもないと、定常状態は保てない。）よって、 $\delta v(l) \sim l^{1/3}$ となり、 $E \sim l^{2/3}$ である。こ

れをフーリエ変換したものが $E(k) \sim k^{-\frac{5}{3}}$ つまり Kolgomorov の $\frac{5}{3}$ 乗則に他ならない。ここにおいて大事なことは、粘性を特徴付ける時間スケール $t \sim l^2/\nu$ (ν : 粘性率) であり、 ν が十分小さければ、ある程度大きい渦に対しては、カスケードの方が散逸よりずっと早く起きて散逸の効果は無視できると言うことである。この仮定によりエネルギーの注入—伝達—散逸という乱流の構造が定量化され、実験的にも $\frac{5}{3}$ 乗則が確認された。

これで終わりならば話は簡単であったのだが、Kolgomorov の「乱流は、一様、等方、定常である」と言う仮定は実験的には間違っていることがわかった。つまり、エネルギー散逸領域は空間全体に広く分布しているのではなく、ごく限られた領域にその大部分が集中していることが解ったのである。これが、エネルギー散逸領域の空間的間欠性である。にもかかわらず、 $k^{-\frac{5}{3}}$ 乗則は成立すると言う矛盾が生じてしまった。

この問題点を解決するために、Kolgomorov の log-normal モデル [5] や、 β -モデル [6] が提案された。それらは全く異なったモデルであるが、 $\frac{5}{3}$ 乗則と間欠性の矛盾に関する問題に関しては全く同じことしか言っていない。先の $\frac{5}{3}$ 乗則の導出で解るように、エネルギー E は δv の 2 次のモーメントによって求まった。「エネルギー散逸領域の空間的間欠性の影響はもっと高次のモーメントにのみ現れる。」2 次のモーメントに対する補正はごくわずかで検出不能と言うことである。例えば β -モデルは、Kolgomorov の $\frac{5}{3}$ 乗則は局所的には正しいが実際に散逸が生じているのはフラクタル次元 $d_f (< 3)$ の限られた空間の中だけであるとする。(根拠は全く無い) このため、 $\frac{5}{3}$ 乗則は変更され、 $\frac{5}{3} + (3 - d_f)/3$ 乗則となると言うものである。この d_f は、理論的には全く決めることが出来ず、実験により求めるしかない。この値は $d_f > 2.5$ と見なされており、補正はごくわずかである。このため、今までの実験では観測されなかったと言うわけである。実際、 $\delta v(l)$ の高次モーメントの依存性は $d_f = 2.8$ としたときとよく一致することがより精密な実験で確認された。

さて、問題はここから先である。 β -モデルによってうまく表現できるのは 10 次のモーメント程度であり、それより大きくなると、明らかに系統的なずれが生じることが解ってきたのである。これは、乱流の構造が、フラクタルになっているだけではなく、更に、後述するマルチフラクタルになっていると言うことを示す。但しその差を見るためには、10 次以上の超高次のモーメント、20 次、30 次のモーメントを見る必要がある。そういうところまで見ることになんの意味があるのか、10 次まで合えば十分ではないのか？この疑問に答えるには、結局、乱流とは何か、という点が明らかになるまで待つしかないであろう。20 次、30 次のモーメントは、乱流の本質において全く 2 次的、3 次的な性質のものかも知れないし、あるいは本質的な性質のものかも知れない。我々は、本質であると信じているが。

2. 乱流のマルチフラクタルモデル

乱流の空間的間欠構造がマルチフラクタルであることを実験的に最初に確認したのは、Meneveau et al[1]である。彼らは、風洞乱流、格子乱流、円柱後方の伴流、及び大気乱流の4種類の乱流についてその速度場の1次元断面よりエネルギー散逸の分布を求め、その空間構造がマルチフラクタルであることを示した。彼らの取った方法は次のようなものである。まず、乱流中にプローブを入れ、速度場の時系列を測定する。次に、テイラーの凍結乱流の仮定により、 $(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ は $(U\frac{\partial u}{\partial x})^2$ と等しいとみなす。ここで、 U は一様流れの速度であり、乱流による速度場の揺らぎより2桁大きくしてある。更に、散逸エネルギー ϵ は $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ であると仮定して（正確には $\epsilon = \nu$
 $(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)^2$ ）、 $(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ の t 依存性が、 ϵ の x 依存性、つまり、空間構造を表すと見なした。このような多くの仮定をおき、非常に大きな統計誤差を単純に平均してならした結果得られたのが図1のような D_q - q 曲線と f - α スペクトラムである。（マルチフラクタルの詳細については、付録を参照）ごく直感的にいつてしまえば、 D_q とは散逸エネルギー ϵ の q 次モーメントのフラクタル次元である。 ϵ の分布が空間的にバラついている場合には、高次モーメントであればあるほど、 ϵ の密度の大きい場所が支配的となる。このため、 D_q は q の次数に強く依存することになる。Kolmogorovの理論の場合には、空間が一様であるから、 q によらず $D_q = d = 3$ となり、 β -モデルの場合にも空間は非一様であるがその分布は一様なフラクタルであったので、やはり、 $D_q = d_f$ となる。図1を見れば解るように、 D_q は明らかに q に強く依存しており、Kolmogorovの理論はもちろん、 β -モデルでも記述できないことが解る。典型的なマルチフラクタルである。実際、 f - α を見てみれば、この事情は一層はつきりする。 α はいわば、局所的なフラクタル次元とでも言うべきものであり、 $E(k) \sim k^{-r}$ としたときの、 r と $r = -1 - \frac{2}{3}\alpha$ のように関係している。Kolmogorovでは、 $r = \frac{5}{3}$ しかとらななかったが、マルチフラクタルの場合には α が場所によって異なり、広くバラつくことになる。 $f(\alpha)$ は局所的なフラクタル次元が α であるような領域の面積のフラクタル次元である。Kolmogorovであれば f - α スペクトラムは、（1次元断面の場合） $f = d - 2 = 1$, $\alpha = 1$ の一点にボツンと点があるだけであるが、実測では α が広く分布しており、マルチフラクタルであることを示している。このような複雑な現象は、Kolmogorov理論では説明できないものであり、現在も解明されていない。

彼らの実験は多くの仮定を用いた解析をともなっており、いささか信頼性に欠ける。エネルギー散逸についてはこれ以上どうしようもないが乱流の空間的構造がマルチフラクタルになっていると言う事実を示唆する実験や数値計算がいくつかある。1つは、同じくMeneveauのグループによって行われた[7]、乱流中の不純物の濃度分布の空間構造である。彼らは、ジェット噴流中に不純物を混ぜ、後方に生じる乱流中の不純物の濃度分布の2次元及び1次元断面をレーザーでスキャンして、空間構造をダイレクトに観測することに成功した。この方法ではエネルギーの散逸を測ったことにはならないが、空間構造を測ったことになり、しかも直接測定なので、信頼性も高い。この実験でも、不純物の空間分布がマルチフラクタルになっていることが解り、 f - α スペクトラムも前の実験と大差なかった。

更に、2次元乱流の空間構造がマルチフラクタルであるということも解ってきた[8]。2次元乱流

の場合は、カスケードを起こすのはエネルギーだけではなく、渦度の2乗平均であるエンストロフィーである。そこで、中野らはエンストロフィーの散逸率の空間分布を2次元でN-Seq.を直接、数値積分することにより求めた。その結果、エンストロフィー散逸率の空間分布もまた、マルチフラクタルであることが解った。

以上の結果により、乱流の空間構造がマルチフラクタルをなしているのはかなり確実なように思われる。しかし、今のところまだその成因を明らかにする理論はなく、マルチフラクタル分布の構造をパラメーター・フィッティング的に求めた研究があるのみである[9,10]。この点に関して、我々は最近、ある解釈を考え付いた。今のところ単なる予想であるが、それについて以下で述べよう。

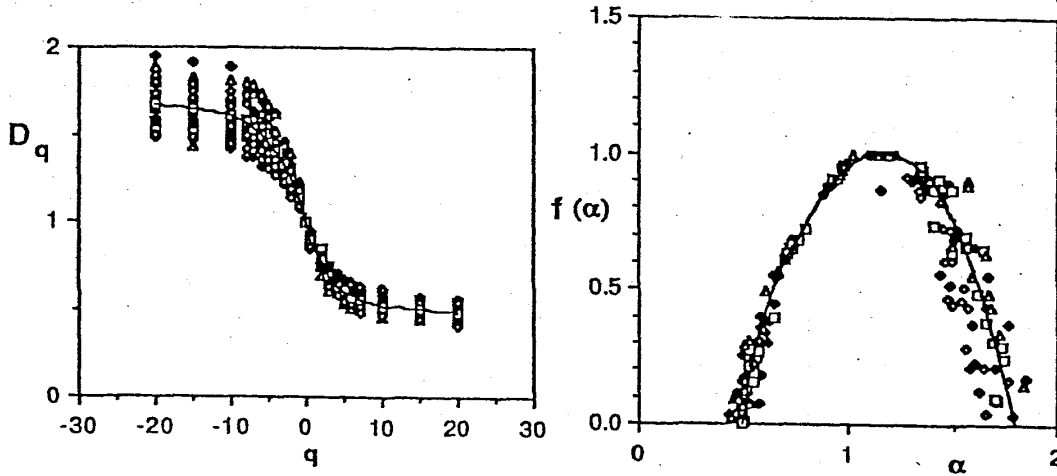


図1 3次元乱流の一次元断面における散逸エネルギーのマルチフラクタル。
左: $D_q - q$ 曲線 右: $f - \alpha$ スペクトラム

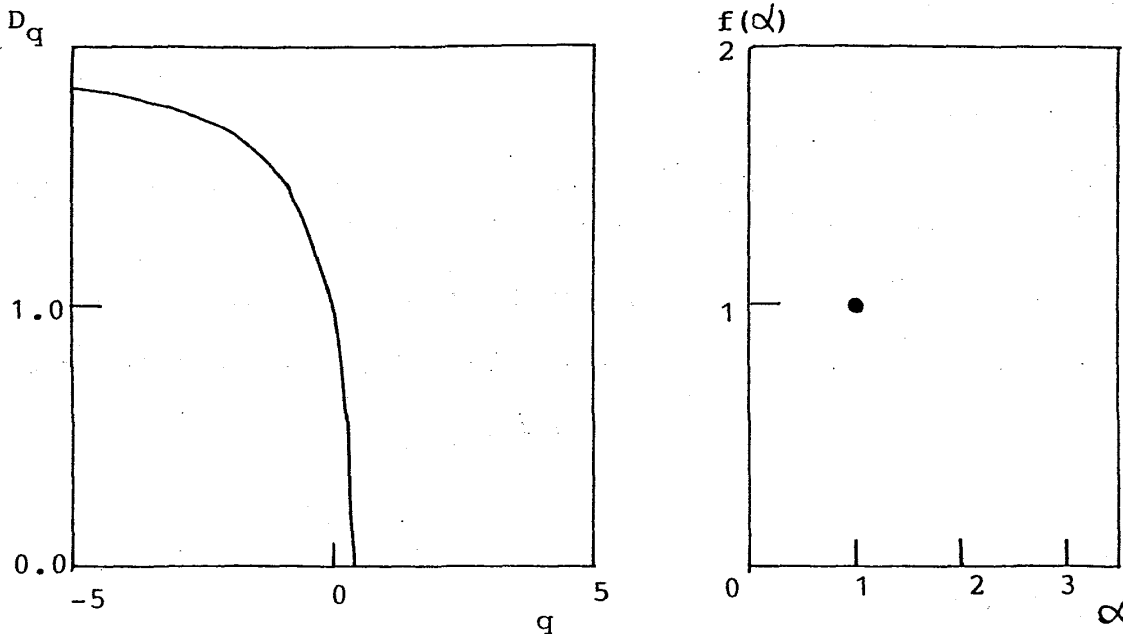


図2 べき分布のマルチフラクタル。($\beta = 0.5$, $D = 1$)

左: $D_q - q$ 曲線 右: $f - \alpha$ スペクトラム

3. 散逸の大きさはべき分布

さてその前にまず、乱流をめぐるもう一つの統計的性質について触れておかねばならない。前述のように、エネルギーの散逸に関係するのは2点間の速度の差 $\delta v(l)$ であった。最近、とある l を固定したときの $\delta v(l)$ の「大きさ」の分布が、ローレンツ分布であることが実験的及び理論的に解ってきた[11,12]。ローレンツ分布は、分布が長いテイルを引くべき分布の一種である。 $\delta v(l)$ は l が小さい時は速度場の微分 $\frac{\partial u}{\partial x}$ に等しく、Meneveau流の近似を行えば $\epsilon \sim (\frac{\partial u}{\partial x})^2$ である。よって、 $\delta v(l)$ の大きさ分布が、ローレンツ分布であると言うことは ϵ の大きさ分布が $P(\epsilon) \sim \epsilon^{-0.5}$ であることを示す。ここで、 $P(\geq \epsilon)$ は、 ϵ より大きいエネルギー散逸の存在確率である。更に、我々が、最近計算している格子渦糸モデルに於いても、渦度の大きさ分布がべき分布となっていることが示されている。渦度の2乗が ϵ に比例するので、これはやはり、 ϵ の分布がべき分布であることを示すものである(5節参照)。

このように乱流に於いて ϵ の大きさ分布は、べき分布であるらしいと解ってきた。これは、前節の空間分布のマルチフラクタル性とどう関係するのだろうか。答えを簡単に言ってしまうと、「べき分布とマルチフラクタルは相入れない」。これは、直感的にもかなり当然である。 l の大きさによらず $\delta v(l)$ がローレンツ分布であると言うことは、 $\delta v(l)$ がなんらかのスケーリング $\delta v(l)/l^\alpha$ の元に統計的に不変であり、単一のスケーリング関数にスケーリングされることを示す。つまり、スケーリング指数 α は単一であり、 $f-\alpha$ スペクトラムは「点」となってしまう、決して、マルチフラクタルを生じさせることはできない。この点については、[13]を見て頂くとして、結果のみ示せば、

$$D_q = d \left[\frac{q}{\beta} - 1 \right] / (q-1) \quad (q < \beta)$$

$$= 0 \quad (q \geq \beta)$$

及び

$$f(\alpha) = d \quad (\alpha = \frac{d}{\beta})$$

$$= 0 \quad \text{otherwise}$$

(図2、 $d=1, \beta=0.5$)、但し、 β は $P(\epsilon) \sim \epsilon^{-\beta}$ である。見るからにMeneveauらのデータとは似ても似つかない形をしている。この矛盾はどうすれば解決できるであろうか。

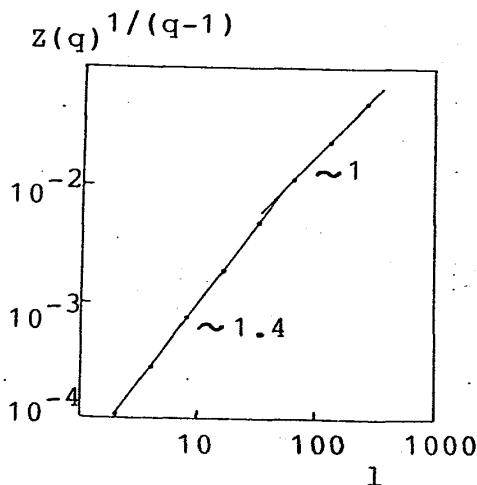


図3 ハイブリッドモデルのクロスオーバー。
($q = -1.5$) グラフの傾きがフラクタル次元を表す。

4. べきとマルチをつなぐもの ～ハイブリッド・モデル～

さて、ここで高安は次のように考えた。乱流で $\delta v(l)$ の「大きさ」分布がローレンツ分布になっているのは確かであるとしても、実際には、 $\delta v(l)$ の大きさには、上限がなくてはならないのではないか。もし上限があるとすると、その影響が出て、図2のようなべき分布によるマルチフラクタルの形が歪み、あたかも図2のように見える可能性はないだろうか。実際、小貫[12]によれば、 $\delta v(l)$ は大体 $Re^{\frac{1}{4}}$ (Re はレイノルズ数) のオーダーで上限を抑えられるということになっている。では、図2は具体的にどの様に歪むのだろうか。 $\delta v(l)$ の「大きさ」分布の幅がひどく小さく、分布のべきのテイルがすごく短い極限を考えよう。するとこの時、実際上、空間分布の揺らぎはほとんど無視できて d 次元空間全体に様に分布しているように見えるであろう。つまり、 $D_q=d$ で q によらないものが出現する。現実の系は完全なべき分布(上限がない)と、これとの中間であるため、 D_q をどのスケールで観測するか($\delta v(l)$ のどの程度の l の近傍で D_q を観測するか)で $D_q=d$ から図2へのクロスオーバーが生じ、適当なスケールで観測すると、あたかも図1の様になって見える可能性はある。このように、上限の存在するべき分布を用いて見かけ上のマルチフラクタル(それは幻に過ぎないのであるが)をつくりだそうと言うモデルをハイブリッドモデルと名付ける。

ハイブリッドモデルが実際に見かけ上のマルチフラクタルを作り出すと言う事実を確認するために、我々は、簡単な数値計算を行ってみた。1次元の直線上に上限 ϵ_{max} のある $P(\epsilon) \sim \epsilon^{-0.5}$ の分布にしたがって、エネルギー ϵ を人工的にランダムに分布させ、 D_q を計算したのである。図3は $q=-1.5$ の時の $[\sum \epsilon(l)q^{1/(q-1)}]$ と l の両対数プロットである。傾きが D_q を与える。 l のある値を境にして D_q の値が変化しており、 l が大きいところでは、 $D_q=1$ 、 l が小さいところでは、 $D_q \sim 1.4$ 、となっている。 $\epsilon_{max}=\infty$ である完全なローレンツ分布では、 $D_q=1.6$ のはずなので、 l の小さいところでは、予想どおりべき分布のマルチフラクタルと $D_q=d$ の中間の値が観測されている。これを様々な q の値について計算し、プロットしたのが図4である。また、試験段階なので、乱流のデータとの一致はいま一つであるが、Meneveauらのデータがまさにべき分布と $D_q=d$ の中間を取っているのは明らかである。これ以後の改善によっては、乱流に於ける D_q の q 依存性をハイブリッドモデルで説明することも可能であると信じている。

以上まとめると、Kolmogorovの $\frac{5}{3}$ に端を発した乱流の空間構造の定量的研究はいまや、フラクタルやマルチフラクタルといった新しい概念が導入されるに到っている。しかし、その議論はいまだ、現象論の域を脱していない。現象論を越える試みの一つとしてハイブリッドモデルによるマルチフラクタル分布の説明の可能性について述べた。この小文が、少しでも皆さんのお役に立てば幸いである。

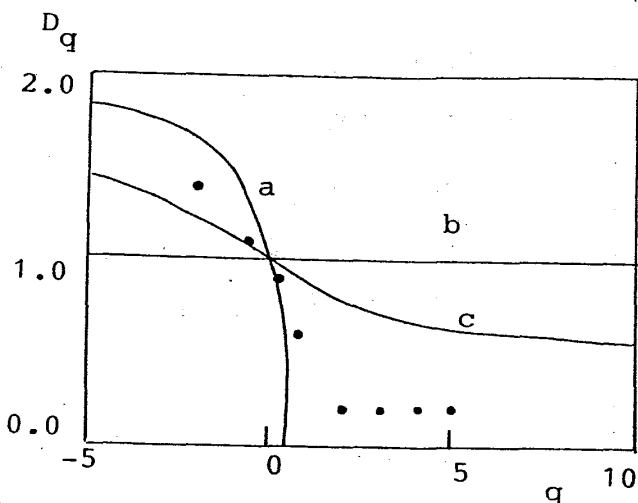


図4
ハイブリッドモデルと
乱流の D_q の比較。
a: べき分布
b: $D_q = d = 1$
c: 乱流
●がハイブリッドモデル

5. 格子渦糸モデル

我々は最近、ランダムに運動する渦糸と言う描像で乱流を捉えるモデル、格子渦糸モデルを提案した。格子渦糸モデルでは、3次元単純立方格子上的各ボンド上に渦糸が定義され、その強さは ω である。そして、 $\text{rot} \vec{u} = \vec{\omega}$ を離散的に解くことにより、各渦糸上の速度 u が計算される。渦糸は、この、速度 u に比例した確率でランダムに運動する。但し、エネルギー $E = \frac{1}{2} \sum u^2$ を保存させるために、 u と ω を常に規格化し続ける。図5に、主な渦糸の運動を与える。このままでは、カスケードが生じないので、外力の代わりとして強さ1、一辺1の単位渦輪をランダムに注入する。また、粘性の効果は、渦糸の等方的な拡散で代用する。これにより、外力+渦糸の運動+粘性と言うシステムが完成し、注入+カスケード+散逸と言う乱流の描像に近づけられると期待される。図6は渦糸の強さ ω の大きさ分布がである。渦度 ω は、局所的に $\delta v(l)$ に関係付けられると期待されるので、3節の結果と比較すると、大きさ分布がべき分布となることが期待される。実際、明らかに、べき分布の部分がみられる。これは、いわゆる不可逆凝集のアナロジーからするとごく当然である。渦度の強さをクラスターの大きさとみると、格子渦糸モデルは注入のある不可逆凝集モデルとよく似ているが、この場合、クラスターの大きさ分布がべき分布となることがよく知られているからである。このように、格子渦糸モデルは、乱流を凝集と拡散を繰り返す渦糸の集合と見なすモデルであり、実験で知られている散逸エネルギーの大きさ分布がべき分布となることを再現し、また、ハイブリッドモデルと組み合わせることにより、乱流のマルチフラクタル構造をも解明する可能性を内抱しているモデルである。

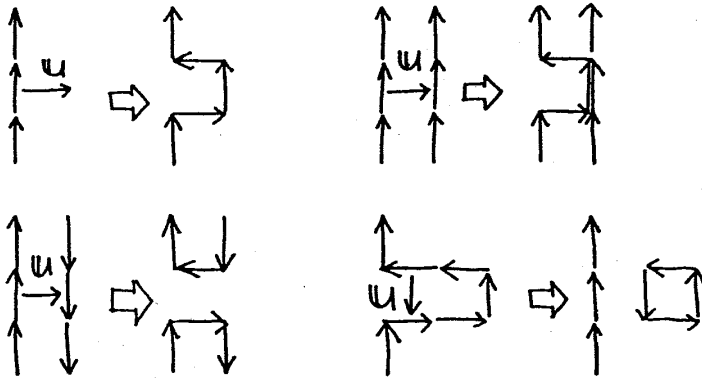


図5
格子渦糸モデルの素過程。
左上：渦糸の変形
右上：渦糸の合体
左下：渦糸の組替え
右下：渦輪の生成

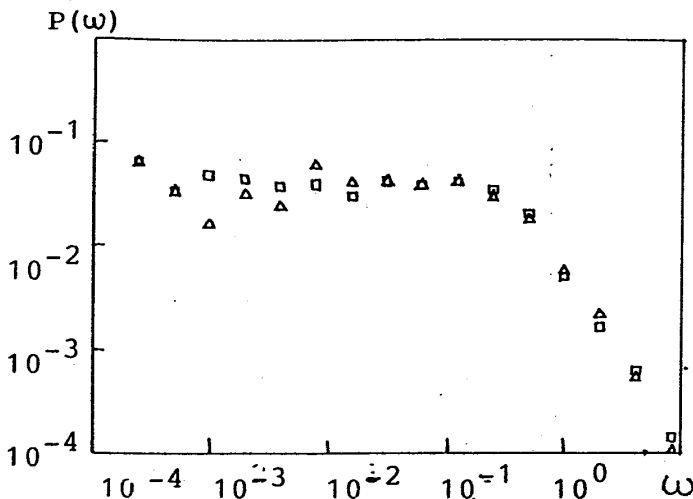


図6
格子渦糸モデルの ω の
分布関数 $P(\omega)$ 。
 $\omega > 0.1$ の領域にべきの
テイルが見られる。

付録. マルチフラクタル[2,14]

マルチフラクタルとは、ごく直感的言うと、「場所によってフラクタル次元が異なって見えるフラクタル」のことである。まず、空間上に密度 $\mu(x)$ (乱流ならば $\varepsilon(x)$)を定義する。そして、この $\mu(x)$ をある点での近傍の大きさ l のBox $A_i(l)$ 内で積分したものを $P_i(l)$ とする。

$$P_i(l) = \int_{A_i(l)} d\mu(x) = l^\alpha$$

この時、この $\mu(x)$ の大きさの局所的なフラクタル次元 α が上記のように定義される。マルチフラクタルでは、この α が、場所によって異なる。この α の分布は「局所的なフラクタル次元が α であるような領域の面積のフラクタル次元 $f(\alpha)$ 」によって、定量化される。つまり、

$$N_\alpha(l) d\alpha = l^{-f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha$$

である。(普通のフラクタルであれば、 $\alpha = d_f$ しか取らず、その時の $f(\alpha)$ も d_f となる。)このような、マルチフラクタルでは D_q が q に依存する。密度 $\mu(x)$ の一般化次元 D_q は、

$$\sum_i P_i(l)^q = l^{D_q(q-1)}$$

で定義される。これを、 $f(\alpha)$ で表すと、

$$\sum_i P_i(l)^q = \int l^{\alpha q - f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha$$

である。 $l \rightarrow 0$ では、鞍点法により、

$$\sum_i P_i(l)^q = l^{\alpha_q q - f(\alpha_q)}$$

となる。ただし、 α_q は $\frac{d}{d\alpha}[\alpha q - f(\alpha)] = 0$ となる α の値である。よって、

$$D_q = \frac{1}{q-1}[\alpha_q q - f(\alpha_q)]$$

となる。よって、 $f(\alpha)$ をうまく選べば様々な D_q を再現できる万能のフィッティングモデルである。

References

- [1] C. Meneveau and K.R. Sreenivasan, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 2 (1987) p49
- [2] G. Paladin and A. Vulpiani, Phys. Rep. 156 (1987) p147
- [3] L.F. Richardson, Weather prediction by numerical process (Cambridge Univ. Press, 1922)
- [4] A.N. Kolgomorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR 30 (1941) p299
- [5] A.N. Kolgomorov, J. Fluid. Mech. 12 (1962) p82
- [6] U. Frish, P. Sulem and M. Nelkin, J. Fluid. Mech. 87 (1978) p719
- [7] R.R. Prasad, C. Meneveau and K.R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) p74
- [8] H. Mizutani and T. Nakano, J. Phys. Soc. Jpn. 58 (1989) p1595
- [9] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani, J. Phys. A17 (1984) p3521
- [10] C. Meneveau and K.R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) p1424
- [11] P. Tong and W.I. Goldburg, Phys. Lett. A 127 (1988) p147
- [12] A. Onuki, Phys. Lett. A 127 (1988) p143
- [13] M. Takayasu and H. Takayasu, Phys. Rev. A 39 (1989) p4345
- [14] 「フラクタル科学」 高安秀樹編 朝倉書店 1987