

ハミルトン系の拡散における加速モードによる異常拡散

九大理 石崎龍二、秦 浩起、堀田武彦、森 肇

保存系のカオスの統計的性質を調べる目的で、スタンダードマップをモデルとしてその拡散を調べた。スタンダードマップは

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ J_{i+1} \end{bmatrix} = F(X_i) = \begin{bmatrix} \theta_i + J_{i+1}, \pmod{1} \\ J_i - (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_i) \end{bmatrix},$$

で与えられ、 $K > K_c(0.971635406\dots)$ で J 方向に軌道の拡散が起こる。

拡散の性質を見るために 1 回マップあたりの J 方向の増分を n で粗視化した

$$v_n(X_0) \equiv S_n(x_0)/n = (J_n(X_0) - J_0(X_0))/n$$

の確率分布を考えて

$$P(v; n) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{i=1}^N \delta(v_n(X_i) - v)$$

それを指数関数でスケールして

$$P(v; n) = \exp[-n\psi(v)]P(\bar{v}; n)$$

その指数の肩に乗っている $\psi(v)$ スペクトルを調べた。

普通の拡散が起きていれば確率分布はガウス分布になり、 $\psi(v)$ は

$$\psi(v) = (v - \bar{v})^2 / (4D)$$

となる。 D は拡散係数で

$$D \equiv \langle S_n^2(X_0) \rangle / (2n) \quad n \rightarrow \infty$$

($\langle \dots \rangle$ は初期点についての平均。)

拡散係数の K -依存性については過去によく調べられていて、加速モードと呼ばれるトーラスが安定であるパラメーター K の範囲で拡散係数が発散する異常性が認められている。加速モードというのは、軌道がそのトーラスの近くにくるとある一定の大きさ v_c で J 方向にその軌道を飛ばすトーラスである。

拡散係数が発散するのは、加速モードにカオティックな軌道がくっついている時間の確率分布が次のようなべき分布になっているためだと考えられる。

$$f(\tau) \sim \tau^{-1-\beta}$$

そうすると $n \gg 1$ で n より長くついている時間の確率は

$$W(n) \sim \sum_{\tau=n}^{\infty} \tau f(\tau) \propto n^{-(\beta-1)}$$

となり

$$\langle S_n(X_0)^2 \rangle \sim n^2 W(n) \rightarrow D = \langle S_n(X_0)^2 \rangle / (2n) \sim n^{2-\beta}$$

もし $\beta < 2$ であれば、拡散係数が発散する。

$$D \rightarrow \infty \text{ for } n \rightarrow \infty$$

加速モードが安定に存在しないパラメータでトーラスがある場合 ($K = 2$ 、図 1) とトーラスがなくなっている場合 ($K = 10.0533$ 、図 2) は、 $v_n(X_0)$ の確率分布はガウス分布になることが $\psi(v)$ の数値計算結果よりわかった。

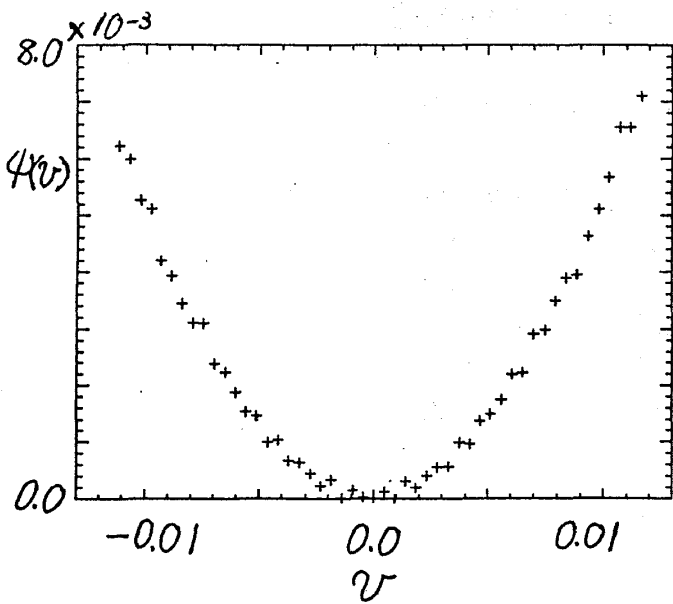


図1 ($K=2, n=1250$)

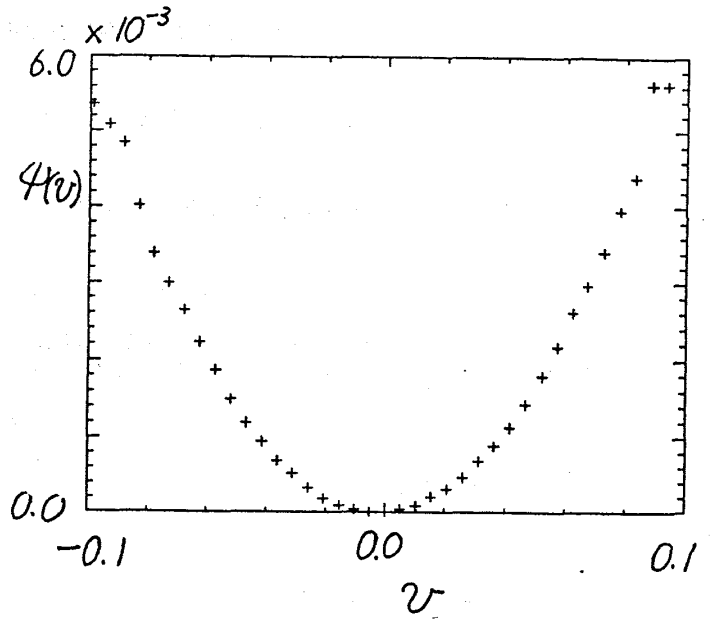


図2 ($K=10.0533, n=1250$)

加速モードが安定に存在する場合 ($K = 6.9115$) は $\psi(v)$ はガウス分布からずれて、図3のような漸近形に近づく事が数値計算結果よりわかった。これより加速モード安定であるパラメーターでは $\psi(v)$ スペクトルが箱型 ($v_s > v > -v_s$ では 0、 $|v| > v_s$ では ∞) に $n \rightarrow \infty$ で近づくことが予想される。

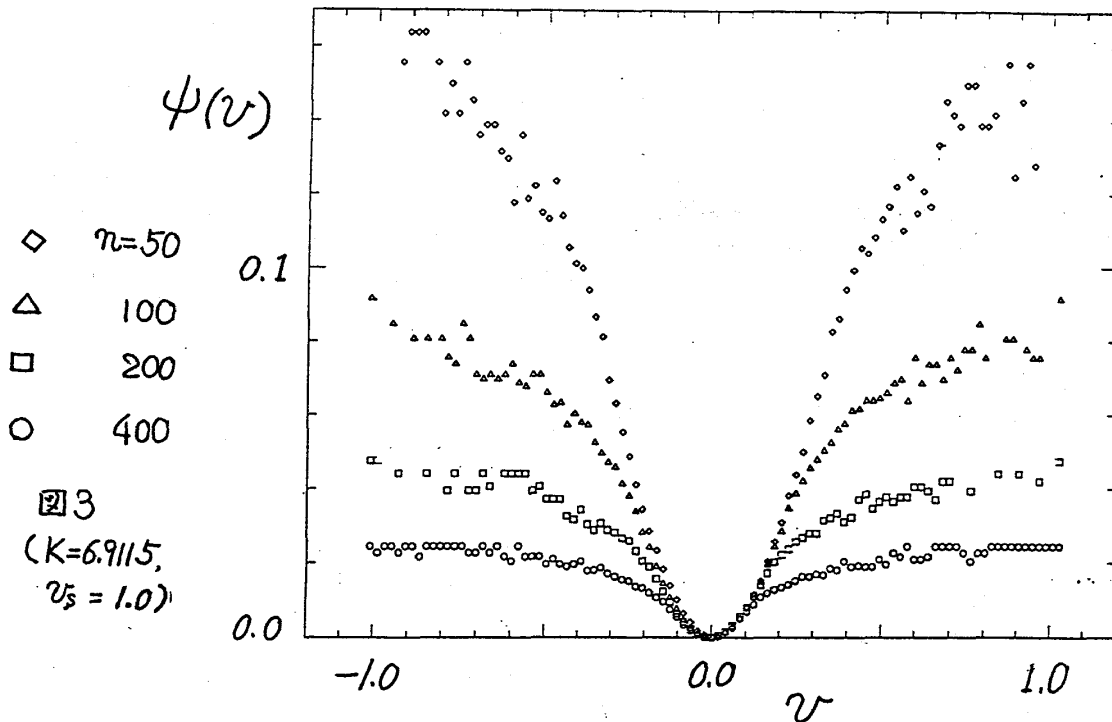


図3
($K=6.9115,$
 $v_s = 1.0$)

詳しい事は H.Mori, H.Hata, T.Horita and T.Kobayashi, Prog. Theor. Phys.Suppl 99(1990), (to be submitted) を参照されたい。