ハミルトン系の広域的カオスにおける軌道拡大率の分布

九大理　堀田 武彦, 秦 浩起, 石崎 龍二, 森 肇

ハミルトン系の stochastic sea の軌道拡大率スペクトル　を明らかにしたい。

2 次元面積保存写像の standard map

$$\begin{pmatrix} \theta_{t+1} \\ J_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_t + J_{t+1} \mod 1 \\ J_t + K/2\pi \sin(2\pi\theta_t) \end{pmatrix} \mod 1 \tag{1}$$

における広域的カオス軌道の軌道拡大率の分布について数値実験の結果を報告　する。ここでは、Kとして 3 つの値を選ぶ。($K = 10.053$,6.0115, 3.8600)$K > K_c = 0.971635\cdots$では、すべての KAM トーラスは壊れており、軌道は相空間 $(0,\ 1) \times (0,\ 1)$ の広い領域を動き回る。$K = 10.053$ では、island の領域は数値計算の範囲内では見えない。$K = 6.0115$　では、アクセレーター・モードと呼ばれる小さい island の領域がある。$K = 3.800$ では、楕円型固定点 (0,0) のまわりに、island の領域がある。

写像 Fのカオス軌道 X_t に対して、$\mu_n^{\pm}(X_0)$ を Jacobian 行列 $DF^n(X_0)$ の固有値とし ($|\mu_n^+|>|\mu_n^-|$, $\mu_n^- \mu_n^+ =1$)、粗視化された軌道拡大率を

$$\Lambda_n(X_0) \equiv (1/n) \log |\mu_n^+(X_0)|. \tag{2}$$

のように定義する。　これは、$n \to \infty$ の極限でリアプノフ数Λ^∞を与える。さらに、$\Lambda_n(X_0)$の確率分布を、カオス軌道についての長時間平均

$$< G(X_0) > \equiv \lim_{N\to\infty} (1/N) \sum_{t=0}^{N-1} G(X_t). \tag{3}$$

を用いて $P(\Lambda; n) \equiv < \delta(\Lambda_n(X_0) - \Lambda) >$, により定義する。

図 a,b,c は、それぞれ $K = 10.053, 6.9115, 3.800$ での

$$\psi_n(\Lambda) \equiv -(1/n)\log\{P(\Lambda;n)/P(\Lambda^\infty;n)\} \tag{4}$$

を n =100,500,1000, にたいしてプロットしたものである。ここで、長時間平均 (3) での時系列の長さ Nは 10^6とした。図は、拡大率の分布は、

$$P(\Lambda;n) \propto \exp\{-n\psi(\Lambda)\} \tag{5}$$

のように、n に対してスケールできることを示している。ここで、$\psi(\Lambda)$ は n に独立なΛの凹関数である。(5) は散逸系のカオスで用いるのと同じスケーリング則である。さらに、island がある場合（$K = 6.9115, 3.800$）には、$0 < \Lambda < \Lambda^\infty$で$\psi(\Lambda) = 0$ となり q-相転移を示す。これは、トーラスへの sticking time の分布が

$$f(\tau) \propto \tau^{-1-\beta}, \quad (1 < \beta < 2) \tag{6}$$

のようにベキ分布を持つことの反映である。

参考文献

H.Mori, H.Hata, T.Horita, and T.Kobayashi, Prog. Theor. Phys. Supplement **No.99** (1990), およびその引用文献。

図