Pomeau-Manneville 型間欠性カオスのクロスオーバー

名大工　樹神弘也
本田勝也
静大教養　佐藤信一

力学系が外部パラメーターの変化にともなって周期運動からカオスに至る道筋の一つに intermittency route がある。Pomeau と Manneville によって発見された、このカオスの発生機構は、分岐の仕方によって大きく Type Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ に分類された（表１）。[1)]

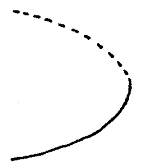
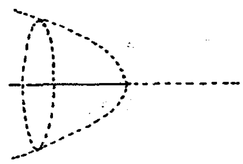
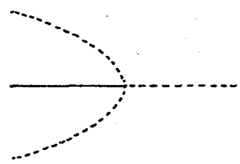
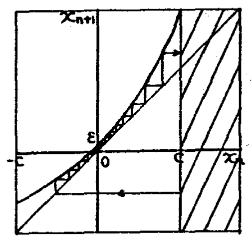
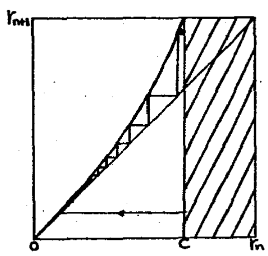
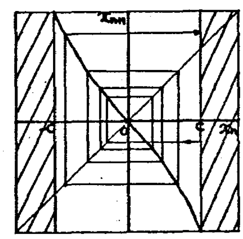
タイプ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
分　岐	鞍部結節点分岐	逆ホップ分岐	逆倍周期分岐
分岐図			
臨界モードに対するマップ (basic model)	 $x_{n+1}=\varepsilon+x_n+x_n^2$	 $r_{n+1}=(1+\varepsilon)r_n+r_n^3$ $\theta_{n+1}=\theta_n+\Omega$	 $x_{n+1}=-(1+\varepsilon)x_n-x_n^3$

表１　３つのタイプの間欠性カオス

q 次のレニーエントロピー K_q や $h(\gamma)$ スペクトラムは力学系の動的な性質を明らかにするが、Pomeau-Manneville 型間欠性カオスの場合、分岐点近傍においてこれらの量に関連した様々なスケーリング則が成り立つことが期待される。本研究は、TypeⅠ～Ⅲのbasic model に対して分岐近傍における K_q，$h(\gamma)$ を解析的手段を用いて求め、その特徴を考察したものである。K_q や $h(\gamma)$ を議論するときの要は分配関数 $Z_n(q)=\sum_{i_0,\dots,i_n} P\{i_0,\dots,i_n\}^q$ である。但し、i_j は相空間を分割したときの1 つの boxを表わし、$P\{i_0,\dots,i_n\}$ は軌道 $x_0,\dots,x_n$ がそれぞれ box $i_0,\dots,i_n$ に入る結合確率である。間欠性カオスに対しては、

$$f(q)\equiv(q-1)K_q=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln Z_n(q)\quad(\equiv-\bar{p}(q))$$

が代数方程式

$$\Phi(\bar{p},q)\equiv\sum_j\exp\left\{-\bar{p}(q)j-qU(j)\right\}=1 \tag{1}$$

$$U(j)=\begin{cases}-\ln b & (j=1)\\ -\ln(aP(j)) & (j\geqq 1)\end{cases}\qquad (P(j)\text{: 長さ } j \text{ のラミナーを見出す確率})$$

（a:バーストの後にラミナーが起る確率，b:バーストの後にバーストが起る確率）

の解として与えられることが報告されている。[2)]

幸いにして、TypeⅠ～Ⅲに対する P(j) は近似的に初等関数で表わせることが分かっているので：

$$\text{Type I}: P_\varepsilon(j)=\frac{\varepsilon}{2c}\operatorname{cosec}^2\left\{\sqrt{\varepsilon}\left(j+\frac{1}{c}\right)\right\}\quad,\ 0\leqq j\leqq j_{max}\ \left(=\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{2}{c}\right)$$

$$\text{Type II}: P_\varepsilon(j)=\frac{2\varepsilon^2(c^2+\varepsilon)\exp(2\varepsilon j)}{\left\{(c^2+\varepsilon)\exp(2\varepsilon j)-c^2\right\}^2}\quad,\ 0\leqq j\leqq\infty$$

$$\text{Type III}: P_\varepsilon(j)=\frac{\varepsilon^{3/2}(c^2+\varepsilon)\exp(2\varepsilon j)}{\left\{(c^2+\varepsilon)\exp(2\varepsilon j)-c^2\right\}^{3/2}}\quad,\ 0\leqq j\leqq\infty$$

これらを用いて(1) 式よりf(q)を評価できる。また、バーストの頻度のq次平均量

$$\Psi_q=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i_0,\ldots,i_n} m\{i_0,\ldots,i_n\}\ P\{i_0,\ldots,i_n\}^q\ /\ Z_n(q)$$

（ $m\{i_0,\ldots,i_n\}$ は、$x_0,\ldots,x_n$のうちのバーストの数）

は(1) 式で決められる$\bar{p}$により

$$\Psi_q=\left.\frac{1}{\dfrac{\partial\,\Phi(p,q)}{\partial p}}\right|_{p=\bar{p}}$$

と与えられるので、これも評価した。以下に結果を示す。

Type I

	$\|q-1\|<1$
$\bar{p}(q)$	$-\sqrt{\varepsilon}(q-1)$
K_q	$\sqrt{\varepsilon}$
γ_q	$\sqrt{\varepsilon}$
$h(\gamma_q)$	$\sqrt{\varepsilon}$
Ψ_q	$\sqrt{\varepsilon}$

Type II

	$-\varepsilon\ln\varepsilon<1-q<1$	$\|q-1\|<-\varepsilon\ln\varepsilon$	$-\varepsilon\ln\varepsilon<q-1<1$
$\bar{p}_q$	$(q-1)/\ln(1-q)$	$(q-1)/\ln\varepsilon$	$-\varepsilon-\varepsilon(q-1)$
K_q	$-1/\ln(1-q)$	$-1/\ln\varepsilon$	$\varepsilon/(q-1)$
γ_q	$-1/\{\ln(1-q)\}^2$	$-1/\ln\varepsilon$	ε
$h(\gamma_q)$	$-1/\{\ln(1-q)\}^2$	$-1/\ln\varepsilon$	0
Ψ_q	$-1/\ln(1-q)$	$-1/\ln\varepsilon$	0

Type III

	$\sqrt{\varepsilon}<1-q<1$	$\|q-1\|<\varepsilon$	$\sqrt{\varepsilon}<q-1<1$
$\bar{p}_q$	$(q-1)^2$	$-\sqrt{\varepsilon}(q-1)$	$-\varepsilon-\varepsilon(q-1)$
K_q	$1-q$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon/(q-1)$
γ_q	$1-q$	$\sqrt{\varepsilon}$	ε
$h(\gamma_q)$	$1-q$	$\sqrt{\varepsilon}$	0
Ψ_q	$1-q$	$\sqrt{\varepsilon}$	0

この結果から、TypeⅡに対しては次の様な概念図を描くことができる。

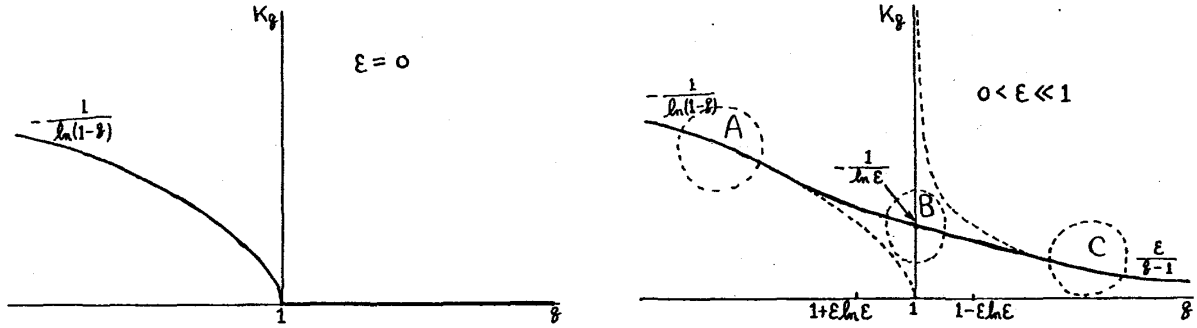


図１　TypeⅡに対するK_qプロットの概念図

A，B，Cの領域は、εの変化も考えると、曲線$\varepsilon=-|q-1|/\ln|q-1|$によって隔てらえるが、この曲線上ではとなりあう領域がクロスオーバーしている。（図２）

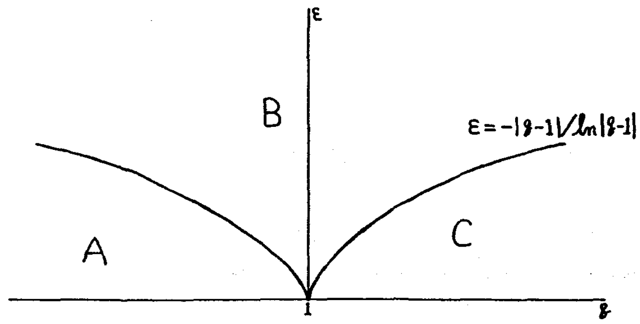


図２　クロスオーバーライン（for TypeⅡ）

TypeⅢの場合は、Type Ⅱと同様なので省略する。

TypeⅠでは、K_qの振舞いはTypeⅡ，Ⅲとは異なり、A，B，Cの様な領域が存在しない。従って当然クロスオーバーラインもない。これは、TypeⅠは$q=1$でq相転移を起さないことを意味するが、分岐点上($\varepsilon=0$)においてもカオス的な振舞いを示す不変測度は存在するので（図３）、$q=1$よりも小さなqで一次のq相転移を起こすと考えられる。

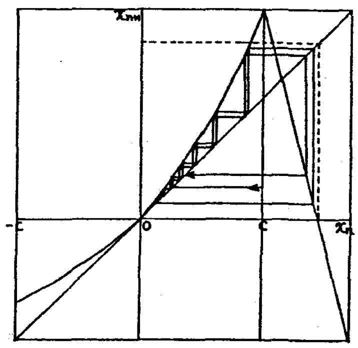


図３　カントール集合上を動くカオス的な軌道

文献

1) H. G. Schuster:"Deterministic Chaos", VCH, (1988)
2) S.Sato and K.Honda:to be published in Phys.Rev.A.
K.Honda and S.Sato:Prog.Theor.Phys.82,682(1989).