

希薄イジング・スピン模型における自由エネルギーのゆらぎとスケーリング則

鹿島短大 田中稔次郎

九大 理 藤坂 博一

鹿大 理 井上 政義

一次元希薄ボンド・イジング模型における自由エネルギーのゆらぎの統計的性質を、定常時間揺動の統計物理的解析法として展開された揺動スペクトル理論¹⁾を用いて調べる。この理論を構成する熱力学形式は、揺動現象の大局的特性に対する新しい見地からの研究を可能にし、この方法による解析はカオスやフラクタルの分野で目覚ましい成果を挙げつつある²⁾。ランダム磁性体におけるゆらぎの問題は、これまで多くの人々によって研究されてきたが³⁻⁹⁾、特にクエンチしたランダム磁性体の自由エネルギーのゆらぎは、フラクタル次元と関連して注目されている。最近、我々はランダム系の自由エネルギーのゆらぎの大局的性質を解明するための新しい統計力学的方法を展開した¹⁰⁻¹¹⁾。さて、ここでは揺動スペクトル理論を用いて、一次元の希薄イジング・スピン系の自由エネルギーのゆらぎとそれらを記述する特性関数等におけるスケーリング則を考察する。

N個のスピンから構成される一次元ランダム・イジング模型のハミルトニアンは次のように表される。

$$H_N = - \sum_{i=1}^N J_i \sigma_i \sigma_{i+1} , \quad (1)$$

ただし、 $\sigma_i = \pm 1$ はi番目のサイトのスピン、 J_i は最隣接スピン σ_i と σ_{i+1} の間の交換積分、すなわち結合定数である。 J_i はサイトiに関して統計的に独立なランダム変数であり、 $J_i = 0$ または1の値をランダムにとる。また、総和は全てのスピン対についてとる。Nイジング・スピン系の分配関数は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} Z_N(\beta) &= \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \exp(-\beta H_N) , \\ &= 2 \prod_{i=1}^N \cosh(\beta J_i) , \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $\beta (= 1/k_B T)$ は系の逆温度である。さて、希薄ボンドのランダムな

分布 $\{J_i\}$ が与えられると、分配関数(2)は、直接計算することができる。ここでは希薄ボンドのランダムな分布は、次の一次元カオティック・マップによって決定する。

$$x_{i+1} = Ax_i(1-x_i) \quad , \quad (3)$$

ただし、振幅 A は $\{x_i\}$ がカオス時系列になるように選ぶ ($A = 3.99999$)。したがって、分布 $\{J_i\}$ は、 x_i の値によって、 $J_i = J$ ($0 < x_i < \omega$) あるいは $J_i = 0$ ($\omega < x_i < 1$) から求まる。 ω は磁気的なボンド $J_i = J$ の量を与える定数である。 $\{x_i\}$ がカオス的なので、 ω の値に依存して J_i の分布は異なる統計的な性質をもつが、これが分配関数 $Z_N(\beta)$ のゆらぎ、すなわち、自由エネルギーのゆらぎの原因となる。

ところで、系の1スピン当りの自由エネルギー f_N は

$$f_N = -\frac{1}{N} \beta^{-1} \ln Z_N(\beta) \quad , \quad (4)$$

で与えられる。ここで $Z_N(\beta)$ は、オーダー $\exp[O(N)]$ のランダム変数だから、 f_N はオーダー N^0 のランダム変数である。 N が大きくなると、 f_N のゆらぎは減少し、 f_N の値は熱力学的極限における平均値 f_∞ に近づいて行く。この $\ln Z_N(\beta)$ の示量性が、サンプル系の集団における自由エネルギーのゆらぎに対して揺動ベクトル理論による解析を可能にする。

自由エネルギーのゆらぎの大局的な統計的性質を明らかにするために、特性関数 λ_q を次のように導入する^{12,13}。

$$\lambda_q = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\beta q} \ln \langle [Z_N(\beta)]^{-q} \rangle \quad , \quad \frac{d\lambda_q}{dq} \geq 0 \quad , \quad (5)$$

ただし、 q は無次元のパラメータ ($-\infty < q < \infty$) である。記号 $\langle \dots \rangle$ はランダムな希薄ボンド $\{J_i\}$ の分布の集団についての平均を表わす。特に $q \rightarrow 0$ の極限では、

$$\lambda_0 = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\beta} \langle \ln Z_N(\beta) \rangle = f_\infty \quad , \quad (6)$$

となる。これはスピン当りの自由エネルギーの通常平均であり、quenched free energy と呼ばれる。また、 $q = -1$ のとき、

$$\lambda_{-1} = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\beta} \ln \langle Z_N(\beta) \rangle \quad , \quad (7)$$

となり、いわゆる annealed free energyである。

特性関数 λ_q は、自由エネルギーのゆらぎの漸近的な実現確率と関係しており、確率密度 $\rho_N(f')$ とすると¹⁾

$$\rho_N(f') \sim \exp[-\beta\sigma(f')N] \quad , \quad (8)$$

ここで、 $\sigma(f)$ は揺動スペクトルである。 q 、 λ_q からルジャンドル変換によって得られる熱力学変数の間の関係式は、次のように表される¹⁾。

$$f(q) \equiv \frac{d}{dq} [q\lambda_q] \quad , \quad (9)$$

$$\sigma(f(q)) \equiv qf(q) - q\lambda_q = q^2 \frac{d\lambda_q}{dq} \quad , \quad (10)$$

ただし、 $df(q)/dq \geq 0$ 、 $d^2\sigma(f)/df^2 > 0$ 。 $f(q)$ は q 次の自由エネルギーである。揺動スペクトル $\sigma(f)$ は $f = \lambda_0 = f(0)$ で最小値 $\sigma = 0$ をとる。スピン当りの自由エネルギーの特性関数 λ_q と q 次の自由エネルギー $f(q)$ をボンド希薄化の濃度確率 c の幾つかの値について図 1 に示す。数値計算の結果から、ゆらぎの幅は、 $\Delta \equiv \lambda_{\infty} - \lambda_{-\infty} = f(\infty) - f(-\infty) \propto c^\delta$ 、($\delta \simeq 0.65$) で増大することがわかった。また、揺動スペクトル $\sigma(f)$ を図 2 に示す。

次にランダムな希薄化によるゆらぎの発生直後の振舞いについて定性的に調べる。まず、次の量を導入する。

$$\hat{\lambda}_q \equiv \lambda_q - f_{\text{mag}} \quad , \quad (11)$$

$$\hat{f}(q) \equiv f(q) - f_{\text{mag}} \quad . \quad (12)$$

ただし、 $f_{\text{mag}} \equiv -\beta^{-1} \ln (e^{\beta J_+} + e^{-\beta J_-})$ で、すべてのボンドの大きさが値 J の場合の 1 スピン当りの自由エネルギーである。式(11)、(12)は完全な次元イジング・スピン系の自由エネルギーの平均値からゆらぎを与える。 $q = 0$ 近傍の数値計算の結果は、 $\hat{\lambda}_q$ が次のように展開できることを示唆している²⁾。

$$\hat{\lambda}_q = \hat{\lambda}_0 (1 + Dq + \dots) \quad , \quad (13)$$

ただし、 $D = d\lambda_q / dq |_{q=0} / \hat{\lambda}_0$ である。さて、 $\hat{\lambda}_q$ および $\hat{f}(q)$ のスケールリング的振舞いを

$$\hat{\lambda}_q = \hat{\lambda}_0 E(Dq) \quad , \quad (14)$$

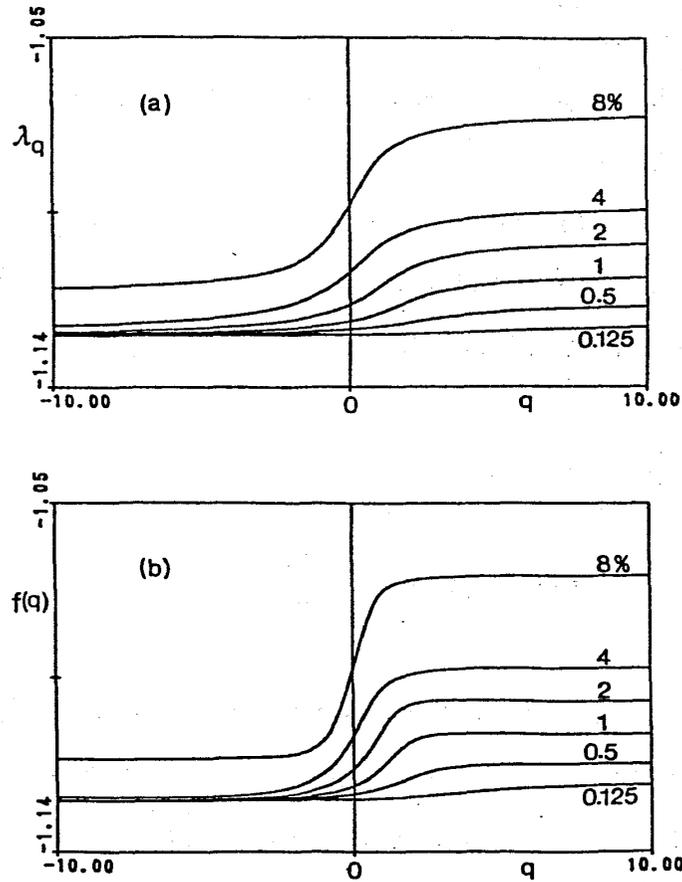


Fig. 1 Numerical results of (a) the characteristic function λ_q and (b) the order- q free energy $f(q)$ for different values of the ratio c . We have put $\beta=J=1$. The characteristic function was calculated by $\lambda_q = (Nq)^{-1} \ln \langle Z_N^{-q} \rangle$ with $N=400$ and the averaging number 1000.

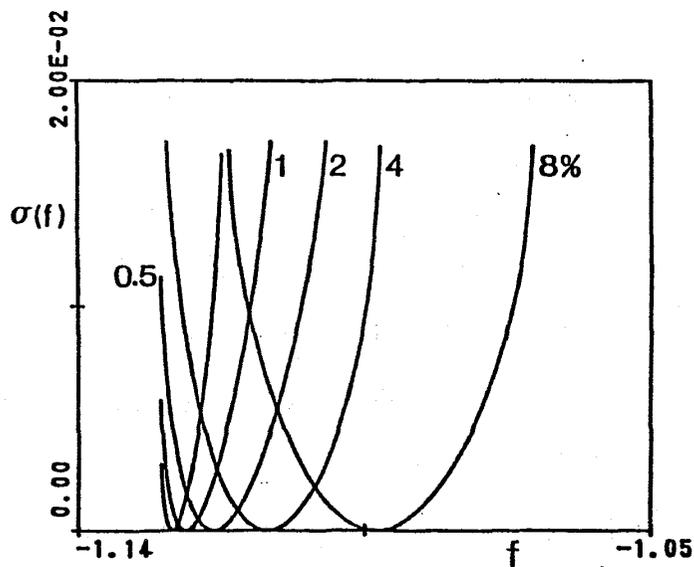


Fig. 2 Numerical results of the fluctuation spectrum obtained with the Legendre transformation of λ_q in Fig. 1a. As the ratio of dilution is increased, the strength of free-energy fluctuation increases. This is seen from the widening of fluctuation range.

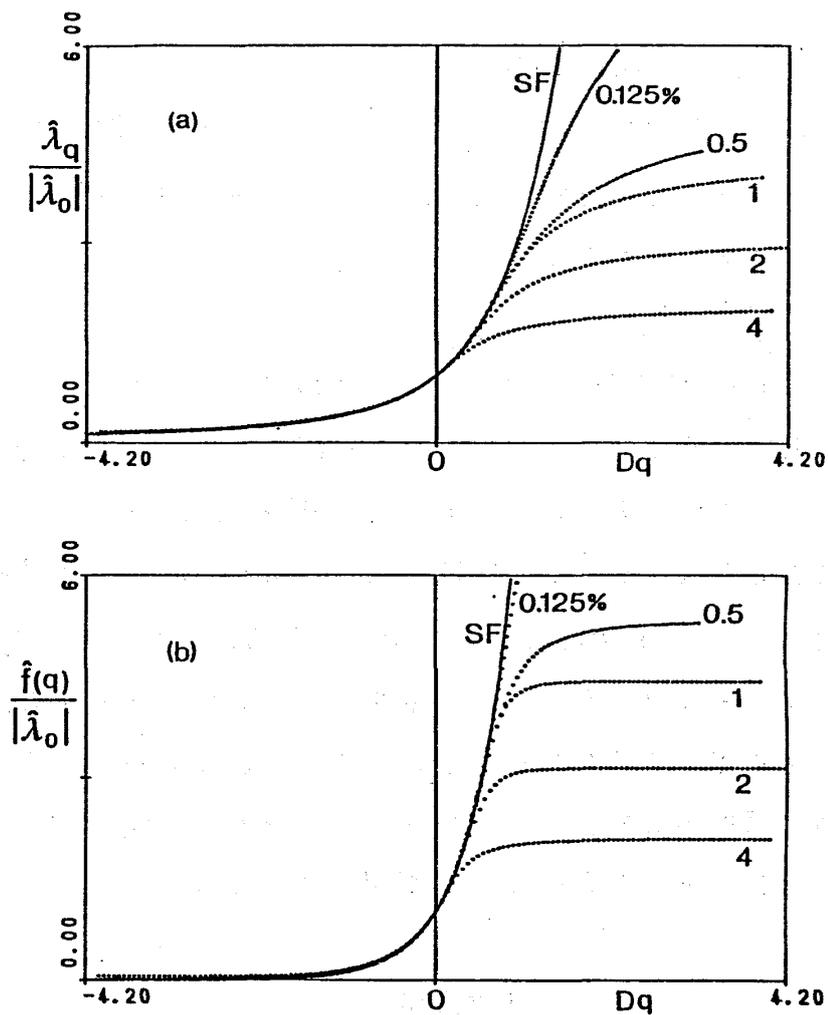


Fig. 3 The scaling forms of $\hat{\lambda}_q$ and $\hat{f}(q)$. D is defined by $D = d(\lambda_q / \lambda_0) / dq|_{q=0}$. Dotted lines are numerical results in Fig. 1. The solid lines are numerical results due to a phenomenological argument, (see text).

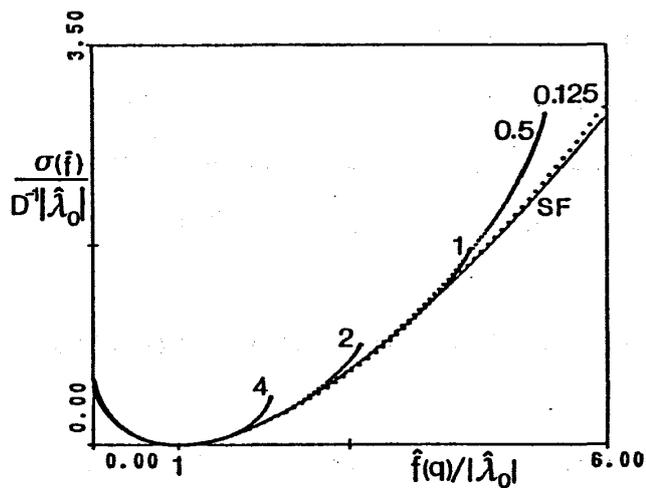


Fig. 4 The scaling forms of $\sigma(\hat{f})$ derived from Fig. 2, (dotted lines). The solid line is due to a phenomenological argument, (see text).

$$\hat{f}(q) = \hat{f}(0)F(Dq) \quad , \quad (15)$$

のように仮定する。ここで $E(y)$ および $F(y)$ はスケーリング関数で、

$F(y) = d[yE(y)]/dy$ の関係を満たす。式(9)、(10)と(14)から、揺動スペクトルのスケーリング的挙動は次の形で表される。

$$\frac{\sigma(\hat{f})}{D^{-1}\hat{f}(0)} = G\left(\frac{\hat{f}}{\hat{f}(0)}\right) \quad , \quad (16)$$

ただし、 $\hat{f} = f - f_{\text{mag}}$ である。スケーリング関数 $E(y)$ 、 $F(y)$ および $G(y)$ の解析的な表式の導出は省略するので、文献2を参照されたい。 $\hat{\lambda}_q$ および $\hat{f}(q)$ の数値計算の結果を c の幾つかの値について、 Dq の関数として図3に示す。図の中の実線は解析的に求めたスケーリング関数である。また、図4では揺動スペクトルに対する式(16)が $\hat{f}/\hat{f}(0)$ の関数として示してある。これらの結果から、ランダムな希薄化イジング・スピン系の自由エネルギーにおけるゆらぎの統計的性質は次数 q の自由エネルギーや揺動スペクトルによってよく記述されることがわかった。特に、希薄化濃度の確率 c の小さい領域($c \rightarrow 0$)では、これらの熱力学的変数には、スケーリング則が存在することが明らかになった。

参考文献

- 1) H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. 77, 1334(1987).
- 2) H. Fujisaka and M. Inoue, Phys. Rev. A, 39, 1376(1989).
- 3) B. Derrida and H. J. Hilhorst, J. Phys. C : Solid State Phys. 14, L539(1981).
- 4) B. Derrida, Phys. Rep. 103, 29(1984).
- 5) R. Bruinsma and G. Aeppli, Phys. Rev. Lett. 50, 1494(1983).
- 6) G. Aeppli and R. Bruinsma, Phys. Lett. A97, 117(1983).
- 7) B. Derrida and H. J. Hilhorst, J. Phys. A : Math. Gen. 16, 2641 (1983).
- 8) G. Gyorgyi and P. Rujan, J. Phys. C : Solid State Phys. 17, 4207 (1984).
- 9) J. M. Normand, M. L. Mehta and H. Orland, J. Phys. A : Math. Gen. 18, 621(1985).

- 10) J. Bene and P. Szepfalusy, Phys. Rev. A37, 1703(1988).
- 11) G. Paladin and A. Vulpiani, Phys. Rep. 156, 147(1987).
- 12) M. Inoue and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 79, 557(1988).
- 13) T. Tanaka, H. Fujisaka and M. Inoue, Phys. Rev. A, 39, 3170(1989).