

## 微分方程式系におけるアトラクターの分岐と動的スケーリング

九大理 富永広貴 堀田 武彦 秦 浩起 森 肇

一般にカオスの分岐点（例えば、クライシス）や発生点（例えば、Type I 間欠性カオス）で、粗視的軌道拡大率 $\Lambda$ の分布はコヒーレントで大きな揺らぎを示す。これは、 $q$ -相転移として捉えられる。また、これらの転移点のまわりで、次のようなスケーリング則が成り立つことが、1次元写像で確かめられた。

$$\Delta\psi(\Lambda, \tau) = \tau^{-\eta} B(\Delta\Lambda), \quad (1)$$

ここで、 $\Delta\psi(\Lambda, \tau)$  は、粗視的軌道拡大率の揺らぎのスペクトル $\psi(\Lambda)$ の直線（転移点に於て $\psi(\Lambda)$ は、直線部を持つ）からのずれを、 $\tau$ は、特性時間を表す。

ここでは、微分方程式系の一例として、非線形強制振り子を使い、Type I 間欠性カオスの発生点で、(1)のスケーリング則が成り立つことを確認した。

非線形強制振り子の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + K \sin \theta = a \cos(\Omega t), \quad (2)$$

ここで、 $\theta$ は、振り子の振れの角、 $\gamma$ は、摩擦係数、 $K$ は、非線形パラメータ、 $a$ と $\Omega$ は、それぞれ、周期外力の振幅と振動数である。

$\gamma = 0.258$ ,  $K = 0.86$ ,  $\Omega = 0.65$ に固定すると、 $a = a_I = 0.70069207\dots$ で、サドル・ノード分岐を起こす。即ち、 $a < a_I$ で、Type I 間欠性カオスが見られる。そこで、 $\epsilon \equiv (a_I - a)/a_I$ と定義し、ラミナーの平均継続時間（特性時間） $\tau$ との関係を数値的に調べると（図1）、 $\tau \sim \epsilon^{-0.59}$ が得られた。

ここで、動的構造関数を導入する。まず、粗視的軌道拡大率を

$$\Lambda_n(X_0) \equiv (1/n) \sum_{t=0}^{n-1} \lambda_1(X_t) \quad (3)$$

で定義する。ここで、 $\lambda_1(X)$ は、不安定方向の軌道拡大率である。

$\Lambda_n(X)$ の確率密度は、

$$P(\Lambda; n) \equiv \langle \delta(\Lambda_n(X) - \Lambda) \rangle, \quad (4)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle$ は、長時間平均を表す。

$\Lambda$ の揺らぎのスペクトル $\psi(\Lambda)$ を、

$$\psi(\Lambda) \equiv - \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log [P(\Lambda; n)/P(\Lambda^\infty; n)] \quad (5)$$

と定義すると、 $P(\Lambda; n)$ は、次のように書ける。

$$P(\Lambda; n) = \exp[-n\psi(\Lambda)] P(\Lambda^\infty; n) \quad (6)$$

ここで、動的構造関数を次のように定義する。

$$\Phi_n(q) \equiv -(1/n) \log \int d\Lambda P(\Lambda; n) \exp[-n(q-1)\Lambda], \quad (7)$$

$$\Lambda_n(q) \equiv d\Phi_n(q)/dq, \quad \sigma_n(q) \equiv -d\Lambda_n(q)/dq, \quad (8)$$

これは、先ほどの $\psi(\Lambda)$ とルジャンドル変換 $\Phi_\infty(q) = \psi(\Lambda(q)) + (q-1)\Lambda(q)$ で関係付けられる。

転移点において、 $\psi(\Lambda)$ は、直線部を持ち、それが、 $\Lambda(q)$ に $q$ 相転移を引き起こす。では、この直線部はどのように形成されるのか。それを調べるために、 $\epsilon > 0$ で、 $\psi(\Lambda)$ の曲率の一番小さい所に直線を引き、それからのずれを $\Delta\psi(\Lambda)$ とする。

$$\Delta\psi(\Lambda) \equiv \psi(\Lambda) - \psi(\hat{\Lambda}) - (1 - \hat{q})(\Lambda - \hat{\Lambda}), \quad (9)$$

ここで、 $\hat{q}$ は、 $\sigma(\hat{q}) = \sigma_{\max}$ を満たす $q$ の値。

この $\Delta\psi(\Lambda)$ は、(1)式のスケーリング則が成り立つことが期待される。図2、3、4にそれぞれ、 $\tau = 20, 30, 40, 50$ の時の $\psi(\Lambda)$ 、 $\Delta\psi(\Lambda)$ 、 $B(\Delta\Lambda)$ を重ねてかいてある。普遍関数 $B(\Delta\Lambda)$ が、存在することがわかる。

$\Delta\psi(\Lambda)$ の2階微分を求めることにより、

$$\sigma(\hat{q}) \sim \tau^\eta, \quad (10)$$

が得られる。図5は $\sigma(\hat{q})$ の $\epsilon$ 依存性をかいたものである。これより、 $\sigma(\hat{q}) \sim \epsilon^{-0.58}$ が得られる。先ほどの、 $\tau$ と $\epsilon$ の関係より、

$$\eta \simeq 1, \quad (11)$$

が得られた。

$a = a_I$ で、 $\tau \rightarrow \infty$ となり、 $\psi(\Lambda)$ に直線部が現れ、 $\Lambda(q)$ に、相転移を引き起こす。

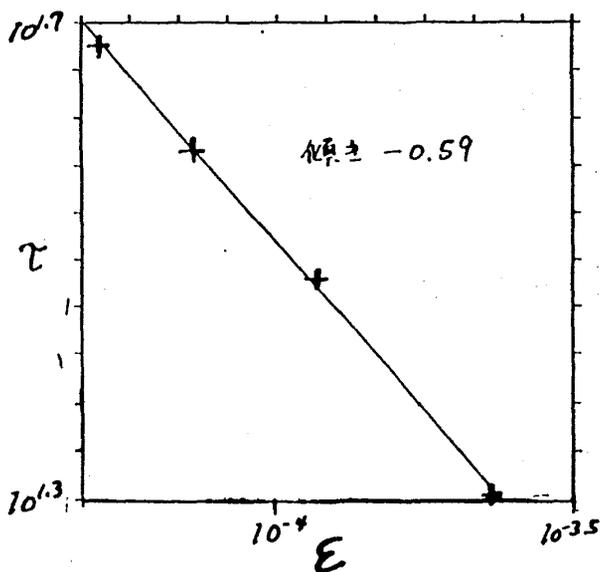


図 1.

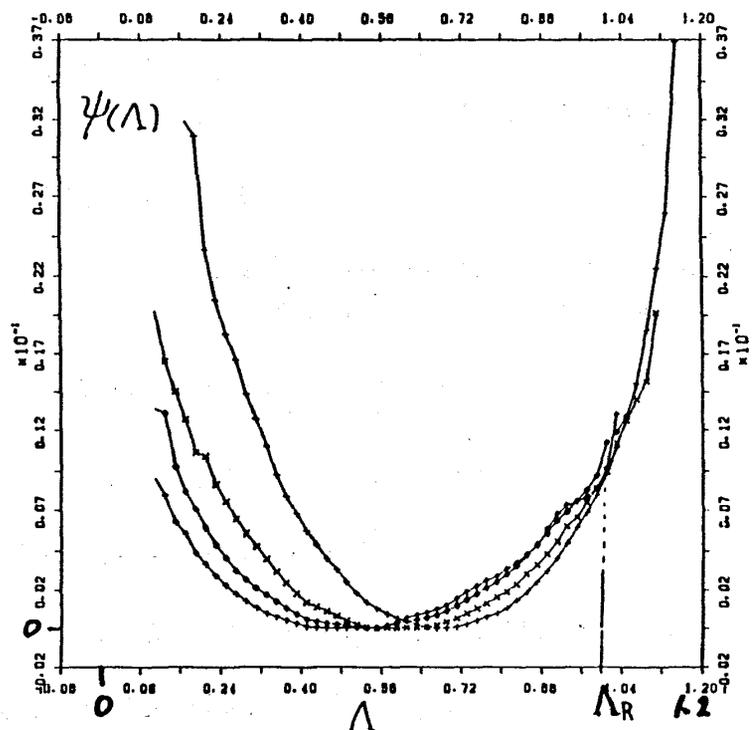


図 2.

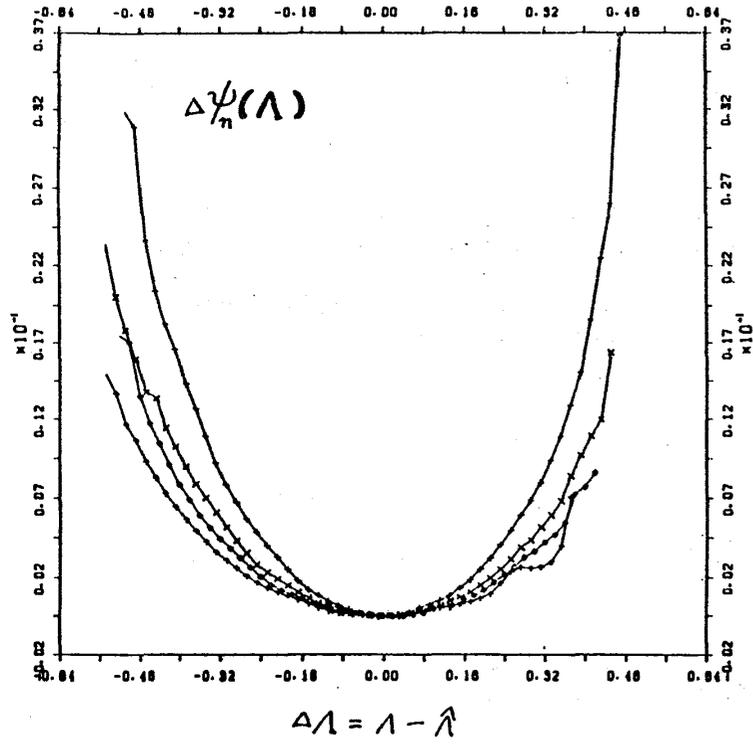


図 3.

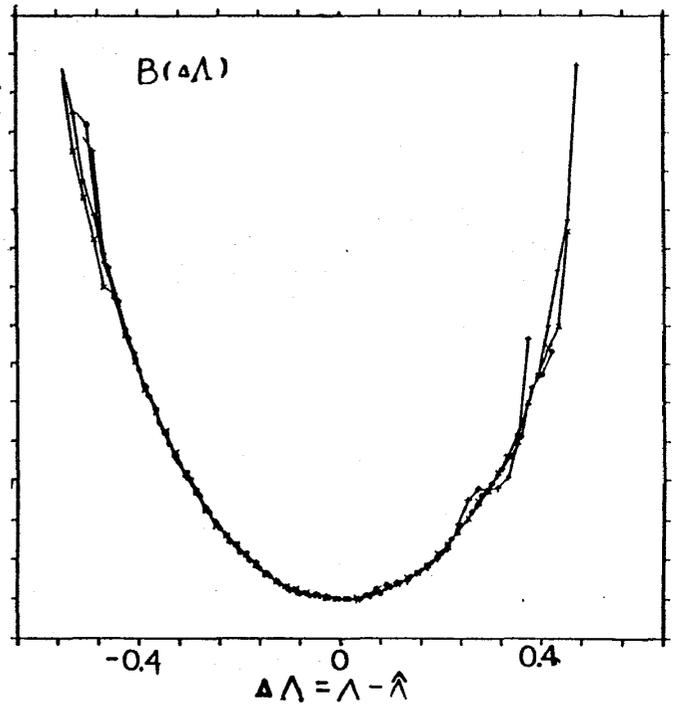


図 4.

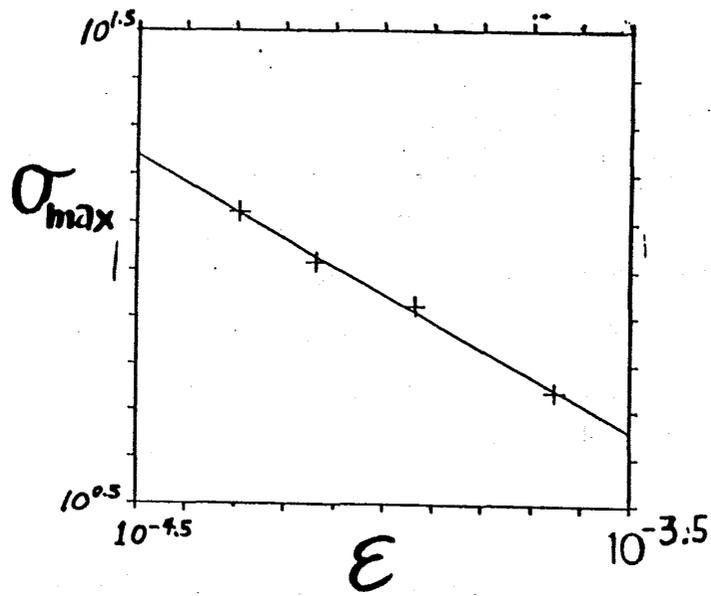


図 5.