微分方程式系の分岐点近傍のスケーリング則

九大・理　村山　徹，富永広貴，森　肇

カオスのアトラクター―の構造は分岐点において劇的に変化し，特異な局所構造をもつようになる。そのような分岐点の局所構造は，軌道拡大率$\Lambda_n(X_0)$のスペクトル$\psi(\Lambda)$によって特徴づけられる。さらに，このような分岐点近傍では，$\Delta\psi(\Delta\Lambda)=\tau^{-\eta}B(\Delta\Lambda)$のようなスケーリング則が成り立つことが1次元写像で確かめられてきたが，ここでは，微分方程式系である強制振子においてもこのようなスケーリング則が成立することを数値的に示す。

次のような強制振子の運動方程式を考える。

$$\ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+K\sin\theta=\Omega[1+\cos(\omega t)]. \tag{1}$$

ただし，θは振子の振れ角，γは摩擦のパラメタ，Kは非線形パラメタ，ωは外力の角振動数を表す。式(1)を数値積分して外力の周期$t_i=(2\pi/\omega)i$, $(i=0,1,2,\cdots)$ごとに点をとると，軌道$X_i=\{\theta(t_i),\dot{\theta}(t_i)\}$が得られる。$\gamma=0.22$，$\omega=1.0$を固定し，$\Omega$と$K$を変化させて，回転数$\rho\equiv\lim_{n\to\infty}\{\theta(t_n)-\theta(t_0)\}/2\pi n$を計算すると，相図(図1)が得られる。図1(b)の実線はサドル・ノード分岐，破線はクライシスを表す。斜線の領域では，回転数1/2と回転数2/3のアトラクターが共存しており，図の矢印に沿ってパラメタKを変化させると，$K=K_C=0.307148$，$\Omega=\Omega_C=0.1705898$で，アトラクター融合クライシスが起こる。図2にクライシス前後のアトラクターが示してある。

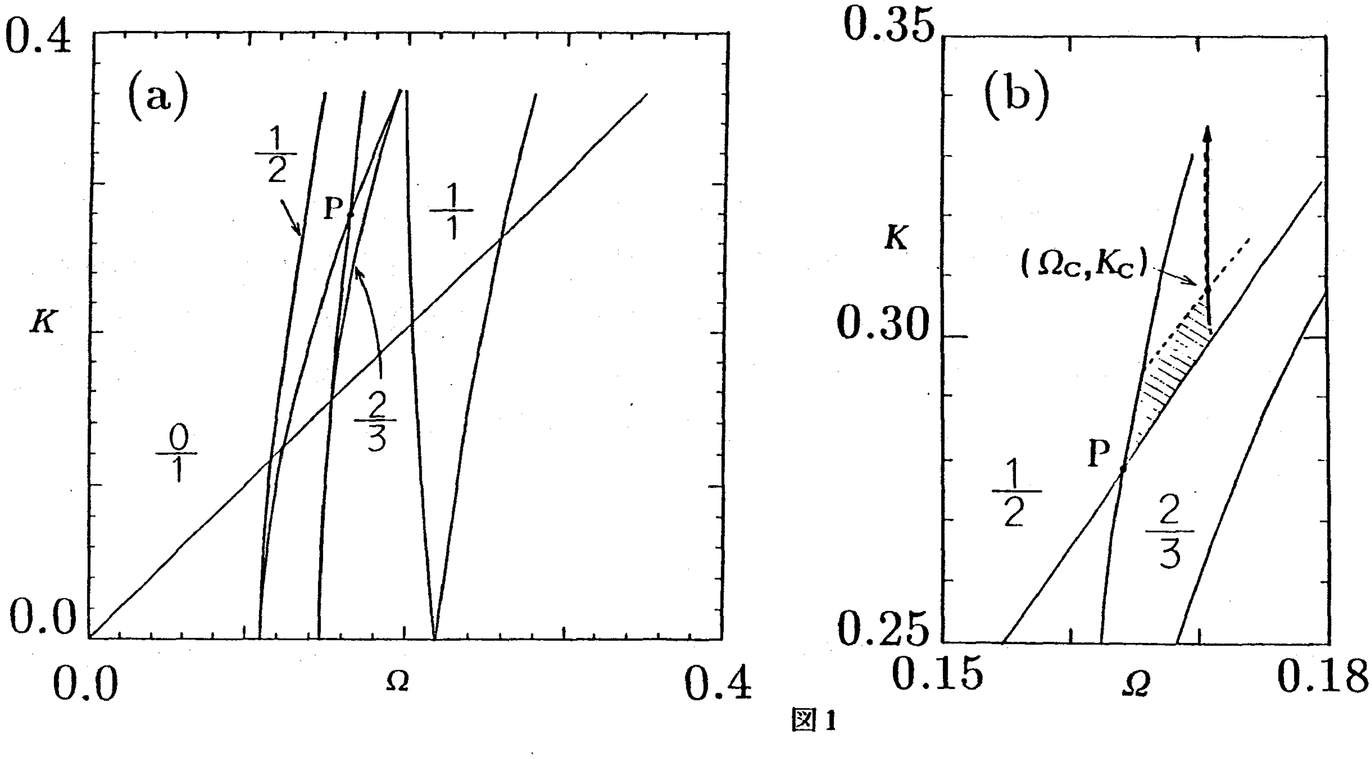

図1

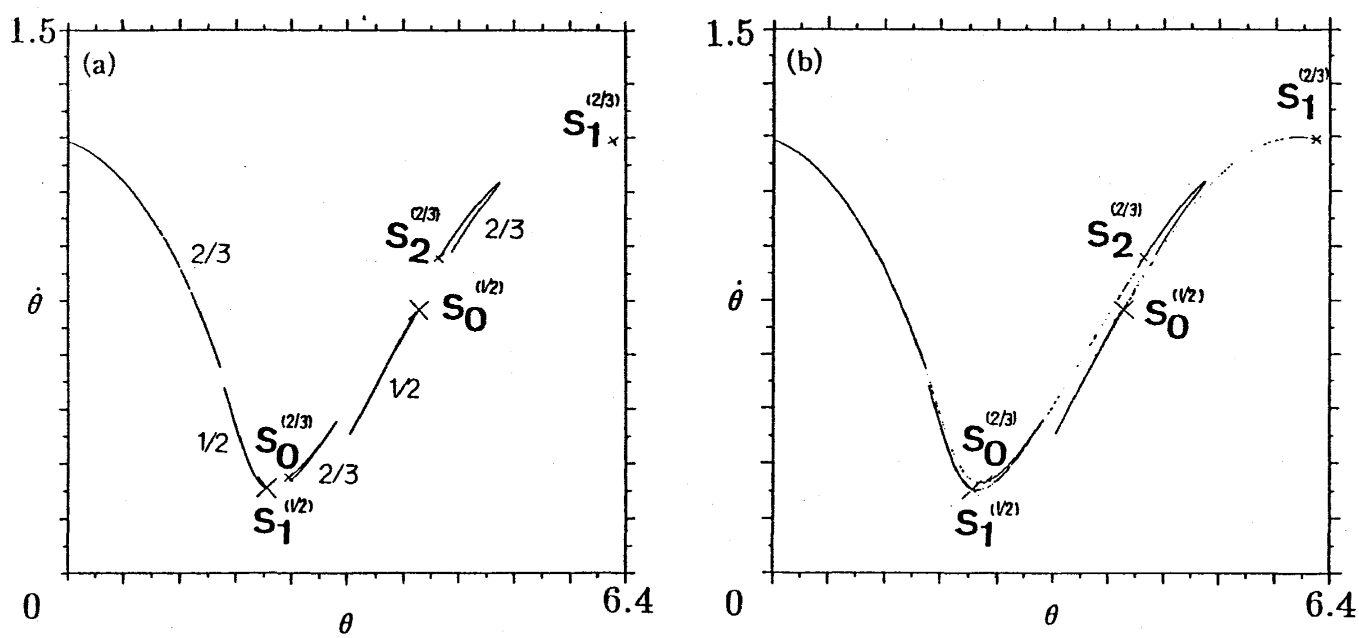

図2

このような分岐点の局所構造を捉えるため，粗視化された軌道拡大率$\Lambda_n(X_0)$を導入する。

$$\Lambda_n(X_0) \equiv (1/n)\sum_{m=0}^{n-1}\lambda_1(X_m) \tag{2}$$

この軌道拡大率の値がΛになる確率を，$P(\Lambda;n)$とすれば，$N\to\infty$のとき，

$$P(\Lambda;n) \equiv (1/N)\sum_{i=0}^{N-1}\delta(\Lambda_n(X_i)-\Lambda). \tag{3}$$

そして$P(\Lambda;n)$は次の形にかける。

$$P(\Lambda;n) = \exp\{-n\psi(\Lambda)\}P(\Lambda^\infty;n) \tag{4}$$

さらに，動的構造関数を次式で定義する。

$$\Phi_n(q) \equiv -(1/n)\ln\left[\int d\Lambda P(\Lambda;n)e^{-n(q-1)\Lambda}\right], \tag{5}$$

$$\Lambda_n(q) \equiv d\Phi_n(q)/dq, \qquad \sigma_n(q) \equiv -d\Lambda_n(q)/dq \geq 0. \tag{6}$$

クライシス後 ($K=0.3074$, $\omega=0.170664$) の$\psi(\Lambda)$，$\Lambda_n(q)$，$\sigma_n(q)$が，図3に示してある。図より，$q=q_\gamma\simeq1.0$ および $q=q_\delta\simeq0.5$ で，q-相転移が起こっているのがわかる。

クライシス直後では，軌道はクライシス前にアトラクターがあった領域に，平均時間$\tau_{1/2}$，$\tau_{2/3}$だけ滞在していて，この特性時間τは，数値的に，$\tau_{1/2}\simeq0.15\,\varepsilon^{-0.760}$，$\tau_{2/3}\simeq2.28\,\varepsilon^{-0.683}$

($\epsilon \equiv (K-K_C)/K_C$) と見積もられる。$\psi(\Lambda)$ は分岐点直後 ($K=K_C+0$, $\Omega=\Omega_C$) では線形部分を持つが，分岐点から離れてくると，その線形部分がたるんでくる。そのたるみを，

$$\Delta\psi(\Delta\Lambda) \equiv \psi(\Lambda) - \{\psi(\hat{\Lambda}) + (1-\hat{q})\Delta\Lambda\} \tag{7}$$

(ただし，$\Delta\Lambda \equiv \Lambda - \hat{\Lambda}$) と定義すれば，$\Delta\psi(\Delta\Lambda)$ は，スケーリング則，

$$\Delta\psi(\Delta\Lambda) = \tau^{-\eta}B(\Delta\Lambda) \tag{8}$$

に従う。図4には，$\tau=54,69,100$ のときの$\psi(\Lambda)$ と $B(\Lambda)$ が示してある。スケーリング指数は，数値的に$\eta \simeq 1.0$ となる。図4より，τに依らない $B(\Lambda)$ が，確かに存在していることが証拠づけられる。

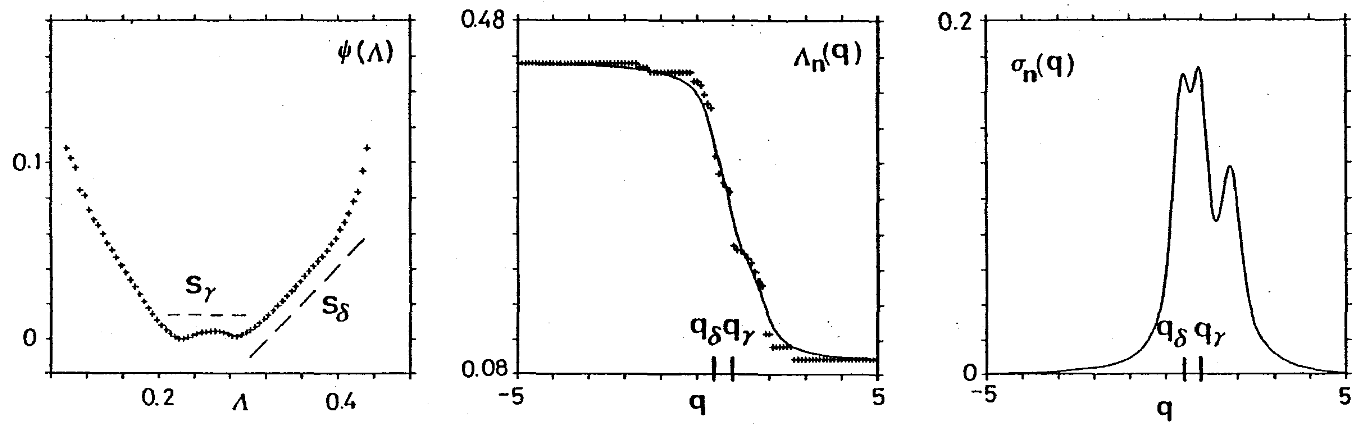

図3

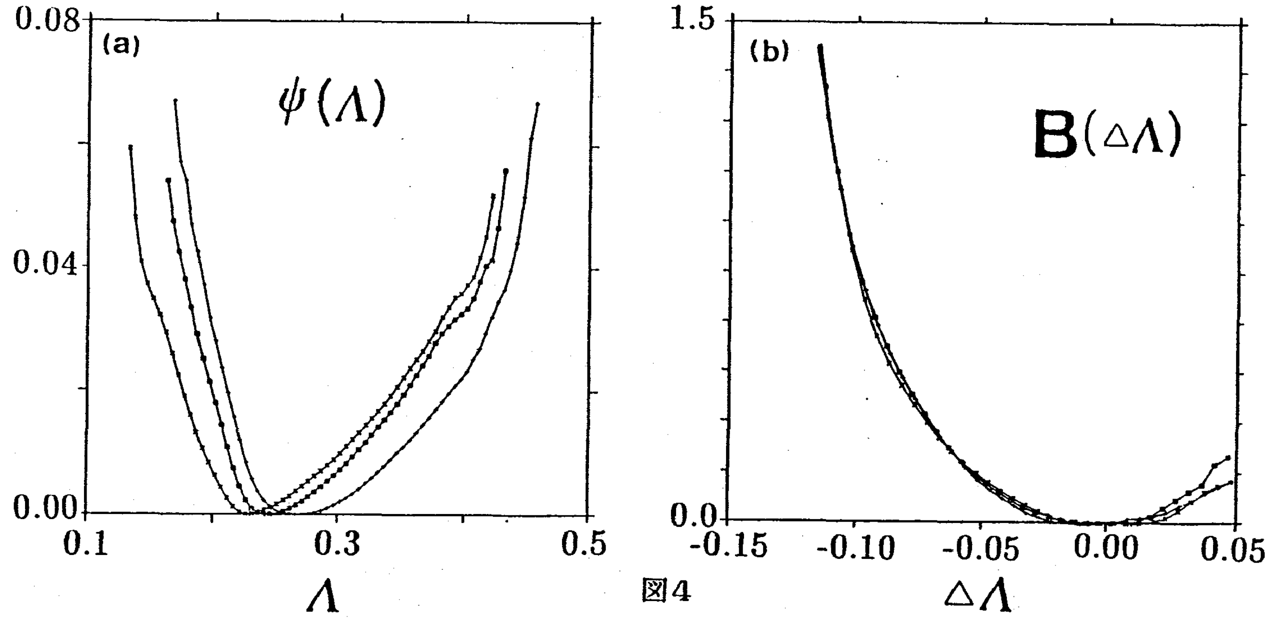

図4