特別講演　　ソリトンからカオスへ

京大理　川原琢治

§1。　はじめに

可積分な分散非線形系においてソリトンが非線形ノーマル・モードとして基本的であり、連続無限自由度系の非線形現象が有限個のソリトンおよび輻射の重ね合わせで記述できるという意味で低次元系に逓減することが可能であることはよく知られている。　本報告では、非線形発展方程式におけるソリトンとカオスを取り上げ、ソリトンのような非線形ノーマル・モードあるいは空間的局在構造によってカオス現象をどこまで近似的に記述できるかという問題を考える。　これは、基礎物理学研究所の池田教授から「ソリトンとカオスとはどのようにつながるべきかについてフィロソフィーを含む報告をするように」との要請を受けたことに対し、その一部になりとも答えるべく、筆者自身が興味を持つテーマについて、どろなわ勉強をした結果を研究会で報告したものの概要である。

当初予定した話題は

（i）　　逓減摂動の高次近似
（ii）　　可積分系に近い場合のカオス
（iii）　可積分系に近くない場合の弱いカオス
（iv）　　強いカオスの統計的記述
（v）　　空間多次元系への拡張の問題

であった。　実際の講演では、時間的な制約もあり、（i）、（ii）については多少詳しく述べたものの、（iii）－（v）については殆ど報告できなかった。　ここでも講演の実情に対応して、（i）、（ii）は多少詳しく、他は概要のみを述べることにする。

最初に、ソリトンおよびカオス現象を示す非線形発展方程式の代表的なものを表にまとめておく。（以下本文中では、各々の方程式を表に示された略称で呼ぶことにする。）

Nonlinear Evolution Equations

dispersive		dissipative
KdV (Korteweg -de Vries) eq. NS (nonlinear Schrödinger) eq. SG (sine-Gordon) eq. (soliton breather) regular ↑ integrable	KdV-Burgers eq.	Burgers eq. RD (reaction -diffusion) eq. (shock dissipative pulse)
↓ irregular non-integrable FKdV (fifth -order KdV) eq. (chaos)	Benney eq. GL (Ginzburg -Landau) eq. (chaos)	KS (Kuramoto -Sivashinsky) eq. (chaos)

この表に示した方程式は、いずれも、非線形性の程度が弱いという、非線形摂動の最低次の近似のもとに得られたものである。 このような最低次近似のソリトン方程式で無視された高次摂動項の効果を取り入れる方法に関する話題を最初に取り上げる。 第２の話題としては、可積分系（ソリトン系）に近い場合の弱いカオスが有限個のソリトンおよび輻射で近似的に記述できることを示した研究を取り上げる。 第３の話題は、可積分に近くない場合の弱いカオスを空間的局在構造に基づき記述しようという試みであり、第４の話題は、同様な考え方で強

いカオスの場合の統計的性質をどこまで記述できるかという点に関するものである。 最後の話題は、空間次元が２、３次元の場合における空間的局在構造による記述の問題点を指摘することである。

§２。 逓減摂動の高次近似

ＫｄＶ方程式やＮＳ方程式のような可積分ソリトン方程式は、弱い非線形性を取り入れた漸近展開の最低次近似として得られるものである。 従って、摂動近似で無視された高次項の効果、あるいは大振幅ソリトンを考慮するとき可積分性がどうなるかなどが問題となる。

ソリトンに対する高次補正は Ichikawa達(1976､1977)[1] により取り扱われ、補正項の加わった "dressed soliton" の振舞いが調べられた。 しかし、dressed soliton は永年項を含み長時間で発散を示した。 Kodama-Taniuti(1978)[2] は保存量の汎関数微分項を加えることにより永年項をソリトン速度に "繰り込む" ことができることを示し、１次の補正項の効果が、積分可能な一般化されたＫｄＶ方程式あるいはＮＳ方程式で近似できることを明らかにした。 高次補正項の繰り込みを一般化したものが Kodama による normal form analysis である。 アイディアは、有限次元系の場合に摂動 Hamilton 系を正準変換により可積分な normal form に変換するという Birkoff の normal form theory と同様である。高次補正項を加えたソリトン方程式を Lie 変換により高次の可積分系（これを normal form と呼ぶ）に書き換えるのである。 水面波におけるＫｄＶ方程式の場合について Kodama(1984)[3] の結果を以下に具体例として示す。

逓減摂動法によって得られる高次補正項を伴うＫｄＶ方程式

$$u_t+u_x+\varepsilon X_0^{(0)}(u)+\varepsilon^2X^{(1)}(u)+\varepsilon^3X^{(2)}(u)=O(\varepsilon^4) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} X_0^{(0)}(u)=u_{3x}+6uu_x \quad (\text{KdV eq.}) \\ X^{(1)}(u)=a_1^{(1)}u_{5x}+a_2^{(1)}uu_{3x}+a_3^{(1)}uu_{2x}+a_4^{(1)}u^2u_x \\ X^{(2)}(u)=a_1^{(2)}u_{7x}+a_2^{(2)}\cdots \end{cases}$$

（以下、添字 ｔ、ｘ などは微分を表すものとする。）

を Lie 変換

$$u = v + \varepsilon\phi^{(1)}(v) + \varepsilon^2(\phi^{(2)} + \phi^{(1)}\cdot\nabla\phi^{(1)}/2)(v) + O(\varepsilon^3) \quad (2)$$

により

$$v_t + v_x + \varepsilon X_0^{(0)}(v) + \varepsilon^2 X_0^{(1)}(v) + \varepsilon^3 X_0^{(2)}(v) = O(\varepsilon^4) \quad (3)$$

$$\begin{cases} X_0^{(1)}(v) = a_1^{(1)}\,[\nabla I_3^{(0)}(v)]_x \\ X_0^{(2)}(v) = a_1^{(2)}\,[\nabla I_4^{(0)}(v)]_x + \mu[R^{(2)}(v)]_x \end{cases}$$

の形に書き換える。 $I_3^{(0)}$、$I_4^{(0)}$、・・・ はＫｄＶ方程式の保存量であり、▽は汎関数微分を表す。 μ はパラメターであり、適当な表面張力の値のとき零となる[Kodama(1985、1988)][3]。

（３）式は高次項が保存量の汎関数微分に書き換えられており、normal form と呼ばれる。 $\mu\neq0$ のときには２次まで可積分、$\mu=0$ なら３次まで可積分となる。 $R^{(2)}(v_s)=0$ となり（３）は ＫｄＶソリトンと同形の解

$$v_s(x,t) = 2\kappa^2 \mathrm{sech}^2\kappa(x-\lambda t) \quad (4)$$

を許す。 変換（２）を用いて（４）を変数 u に戻すと

$$u(x,t) = \sum_{n=1}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{n-1}\beta_j^{(n-1)}\kappa^{2n}\mathrm{sech}^{2j}\kappa(x-\lambda t) \quad (5)$$

の形の解となる。

この解は、 Fenton(1972)[4] が水面波に対して導いた大振幅孤立波解（ninth wave：無次元振幅の９次までの展開で得られた解で、大振幅厳密数値解とよく一致する解）と同形である。 すなわち、normal form（３）の孤立波解はＫｄＶソリトンの大振幅波への拡張となっている。

Kodama(1988)[3] は normal form の保存則あるいは逆散乱法による摂動計算により、２ソリトン相互作用におけるソリトンパラメターの変化を求め、（i）衝突により大きい孤立波の振幅は増大し、小さい方の孤立波の振幅は減少する、（ii）新しい孤立波が生成される、（iii）非可積分項は輻射を生じる、 という結果を得た。 すなわち、normal form（３）で記述される大振幅孤立波は相互作用（衝突）に関して非保存的である。

Kodama の normal form analysis は、ソリトン方程式の高次近似を可積分な形式に書き換えて大振幅孤立波の相互作用を調べたもので、非線形性が強い場合へのアプローチの1つとして注目に値するものである。

§3。 可積分系に近い場合のカオス

純分散性の可積分なソリトン系においては、ソリトンと輻射により系の発展が記述でき、ソリトンは一種の非線形ノーマル・モードであると考えることができる。 ソリトン系に非保存的な摂動項が加わった場合には、ソリトンの相互作用の性格が変わり、非保存的となってカオスなどを生じるが、摂動が微小でソリトン系に近い場合には、可積分系の摂動として解析的取扱が可能である。 NS方程式やSG方程式に外力と散逸（減衰）項とが加わった場合のカオスは、ソリトンと輻射の相互作用として記述でき、無限次元系の振舞が有限個のソリトンの振幅、速度あるいはソリトン間隔など有限個の量の時間変化を記述する有限次元系の取り扱いに帰着できることを Nozaki 達 あるいは Bishop 達が示した。 可積分ソリトン系に近い場合には、逆散乱法に基づく摂動を用いることができ、1ソリトンの挙動のみならずNソリトンの相互作用や輻射についても逆散乱法の固有値や散乱データの変化として記述できる。 逆散乱法に基づく摂動、NS方程式やSG方程式の摂動に関する Nozaki 達あるいは Bishop 達の研究の一端を以下に記す。

(a) 逆散乱法に基づく摂動法

摂動項 R[u] をもつソリトン方程式を

$$u_t = S[u] + \varepsilon R[u] \tag{6}$$

とする。 これを演算子形で表し

$$i\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{A}] = i\varepsilon\hat{R} \tag{7}$$

とすると、固有値問題は

$$\hat{L}\ \phi(x,\ t)=\lambda(t)\ \phi(x,\ t) \tag{8}$$

となる。（7）、（8）より

$$(\hat{L}-\lambda)(\phi_t+i\hat{A}\phi)=(d\lambda/dt)\phi-\varepsilon\hat{R}\phi \tag{9}$$

共役演算子を $\hat{L}^+$、共役固有ベクトルを $\tilde{\phi}$ とすると $\hat{L}^+\tilde{\phi}=\lambda^*\tilde{\phi}$、（＊：複素共役）となり、（9）の両辺に $\tilde{\phi}$ を掛けて積分すると

$$d\lambda/dt=\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}(x)\hat{R}\ [u(x)]\ \phi(x)dx/\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}(x)\phi(x)dx \tag{10}$$

のような固有値の時間発展を記述する式が導かれる。（9）に（8）の固有関数（Jost function）を代入して、散乱データの時間発展を記述する式を同様に導くことができる［Karpman達(1978、1979、1981)、Kaup-Newell(1978)］[5]。

逆散乱法に基づくこの摂動の特徴は、$\varepsilon\neq 0$ の場合にも固有値問題が（8）と同じ形となり、散乱パラメターの時間発展のみが摂動項に依存するということである。このため、可積分系の固有値問題を解くことによって、摂動項によるソリトンパラメターの変化を知ることができるのである。

（b）NS方程式の摂動

NS方程式に外力と減衰項が加わった場合

$$iq_t+q_{xx}+2|q|^2q=-i\ \{\gamma_1q-\gamma_2q_{xx}+\Sigma\varepsilon_n\ \exp\ (i\omega_nt)\}\qquad(\gamma_1、\gamma_2、\omega_n>0) \tag{11}$$

は Nozaki-Bekki(1984)、Nozaki(1985)[6] により取り扱われた。

1ソリトン解

$$q_s=2\eta\ \mathrm{sech}\ (2\eta x)\ \exp\ (-2i\sigma-i\pi/2) \tag{12}$$

の振幅と位相の1次の摂動による変化は

$$\eta_t = -2\gamma_1\eta - 8\gamma_2\eta^3/3 + \Sigma\ \varepsilon_n \sin(\omega_n t + 2\sigma)$$
$$\sigma_t = -2\eta^2 \qquad (13)$$

で記述される。

単色外力（n＝1）の場合、（13）のアトラクターは固定点のみで、ソリトンの振幅は一定値に近づき”同期ソリトン”となる。 外力が複数の振動数成分を含む（n≧2）場合、アトラクターは周期軌道となり、外力の振幅 ε_n が増大すると周期倍化分岐を起こし、カオス的アトラクターに移行する。

摂動が大きくなるとソリトンと輻射の相互作用が無視できなくなるが、十分時間がたてば分散による位相混合により有限波長の輻射は減衰し、波数が0に近い長波長輻射のみがソリトンと相互作用すると Nozaki(1985)[6] は考えた。 ソリトンと長波長輻射の2次の相互作用を考慮すると、単色外力の場合にもカオスを生じることになる。 逆散乱法による摂動展開により、ソリトンの振幅と位相および長波長輻射の時間発展を記述する式を Nozaki 達は導いた。 そして、この低次元に逓減された系における周期軌道の分岐からカオス的アトラクターに至る過程が、もとの偏微分方程式（11）の数値解と定性的に合致することを見いだし、カオス的アトラクターが低次元系で近似的に記述できることを示した。

（c） SG方程式の摂動

Bishop 達(1986)[7] は

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = \varepsilon\,[-\alpha\phi_t + \Gamma\ \sin\omega t] \qquad (14)$$

の解が外力 $\varepsilon\Gamma$ の増大にともないカオスへの遷移を起こす過程を詳しく調べた。解は周期解から準周期解となりカオスに至るが、カオスのときでさえ空間的にはコヒーレントな構造が見られる。 このような空間構造は少数の非線形モードで近似でき、低次元系に帰着できる。 とくに Bishop 達は、逆散乱法に基づいてソリトン（ kink、 anti-kink、 breather）と輻射（ radiation ）に対応する固有値の時間変化を調べ、摂動SG方程式のダイナミックスが少数の非線形ノーマル・モードで記述されることを示した。

前述したように、固有値問題の形式は摂動項によらないから、数値実験により得られる各時刻の波形 ϕ(x、t)に対して固有値問題を解き（すなわち、数値的にスペクトル変換を行い）、各時刻でのスペクトル表示 ϕ(λ、t)を求めることができる。 そうすると、摂動項を含むSG方程式の固有値 λ の時間変化が分かり、系のダイナミックスの特徴を知ることができるのである。[Forest-McLaughlin(1982)][8]。 SG方程式の周期系では、kink、anti-kink、breather、radiation はそれぞれ複素 λ 面のバンドに対応するが、それら固有値の複素 λ 面上での時間変化を調べることにより規則運動とカオスとの判別が可能であること、系の振舞がソリトンと輻射の重ね合わせで表されることを Bishop 達は示した。 このような方法は nonlinear spectral diagnostics と呼ばれている。これは、逆散乱法に基づく摂動が有効に用いられ、具体的に摂動系のスペクトル（固有値）の変化が導かれた例である。 詳細は原論文 [Bishop 達(1986)][7] に譲ることにし、ここでは、可積分系に近い場合には逆散乱法による摂動が有効であること、また、系のダイナミックスが少数個の非線形ノーマル・モード（空間的な構造をもつソリトンや輻射）の重ね合わせによって記述できることを指摘しておきたい。

§4。 可積分系に近くない場合の弱いカオス

非可積分系の典型的な例として、分散系ではＦＫｄＶ方程式

$$u_t + u u_x + u_{5x} = 0 \qquad (15)$$

散逸・分散共存系としては、Ｂｅｎｎｅｙ方程式

$$u_t + u u_x + \alpha u_{2x} + \beta u_{3x} + \gamma u_{4x} = 0 \qquad (16)$$

ＧＬ方程式

$$i a_t + (p_r + i p_i) a_{xx} + (q_r + i q_i) |a|^2 a = i \gamma a \qquad (17)$$

（ａ：複素振幅）

散逸系としてＫＳ方程式

$$u_t + u u_x + u_{2x} + u_{4x} = 0 \qquad (18)$$

などがある。

このような場合の解析には逆散乱法は使えない。　従って、非線形ノーマル・モードのパラメター変化によって系のダイナミックスを近似しようとするときには直接的な摂動法が用いられる。　ソリトンに対応する非線形ノーマル・モードの第一候補となるものは、偏微分方程式の定常解である。（１５）、（１６）、（１８）のような発展方程式の定常解として、衝撃波、振動型衝撃波、孤立波、振動型孤立波、複雑なカオス的定常解など、常微分方程式の homoclinic orbits や heteroclinic orbits を求めることが行われている[Hooper-Grimshaw(1988)、Gorshkov 達(1979)、Michelson(1986)][9]。　常微分方程式の解の多重性と非定常問題における実現性（発展性）の問題との関係はまだ明らかにされていない。

ＧＬ方程式（１７）については Pereira-Stenflo(1977) や Nozaki-Bekki(1984)[10] により１ソリトン厳密解が得られているが、（１５）、（１６）、（１８）については定常解といえども数値的に得られているにすぎない。　従って、このような空間的局在構造に基づき系のダイナミックスを記述するにしても解析的取扱は容易ではない。

ＦＫｄＶ方程式（１５）やＢｅｎｎｅｙ方程式（１６）における弱いカオスを局在パルスの重ね合わせで記述する試みとしては Gorshkov 達(1976,1977)[11]、Kawahara-Toh(1988)、 Kawahara-Takaoka(1988,1989)[12] などがある。　充分に離れた局在パルスが周辺のパルスの裾を通して相互作用する場合には、裾を通しての相互作用を摂動として考慮することができる。　このとき、パルス間隔などのパラメターを支配する方程式は〝ソリトン格子〟方程式となる。　ソリトン格子の振舞は各々のパルスの裾の漸近形に依存し、振動的な裾の存在がカオスの発生に関連することが示されている。

§５。　強いカオスの統計的記述

強いカオスにおいては、局在的な構造の生成・消滅が起こる。　生成・消滅の

プロセスを解析的に記述することは困難であるが、局在構造を考慮してカオスの統計的記述を試みた例がある。 Shen-Nicholson(1987)[13] は、ＮＳ方程式のスペクトルをソリトンの重ね合わせによって表す試みを行っている。

（ａ） ＫＳ方程式のカオスのスペクトル

Toh(1987)[14] は、ＫＳ方程式のカオスのスペクトルを 定常解の重ね合わせにより説明した。 数値実験の結果から局在構造の間隔分布を求め、定常解を対応する間隔分布で重ね合わせることによりスペクトルを算出し、従来の統計理論では説明することが出来なかった数値実験結果におけるスペクトル・ピークが、特定の間隔分布で配列する空間構造に由来することを示した。

（ｂ） ＧＬ方程式のカオス

この場合には、１ソリトン厳密解が空間構造の候補となる。 パルスの間隔分布、位相分布を考慮し、１ソリトン厳密解を重ね合わせたスペクトルがＧＬ方程式のカオスのスペクトルをどの程度まで記述し得るかは検討中である。

純分散的なソリトン系の場合には、ソリトンの stochastic dynamics として "soliton gas" の取り扱いにより統計的記述をする試みがある。 このように、非線形ノーマル・モードに基づいて強いカオスを記述するという試みは魅力的ではあるが、ノーマル・モードとして何を取ればよいかを明らかにすること、散逸系の強いカオスにおける空間構造の生成・消滅を如何に考慮するかということなどが重要な問題点となると考えられる。

§６。 空間多次元系への拡張の問題

１次元系の場合には、空間的なコヒーレント構造（ spatial coherence ）の時間的複雑さ（ temporal complexity ）としてカオスの記述が可能な場合があったが、そのような考え方が空間多次元の場合にそのまま適用できるとは限らない。空間多次元の場合の問題点のいくつかを挙げておく。

（ａ） １次元で安定な解も多次元で不安定となることが多いので、多次元での基本モードを新しく考え直す必要がある。

（ｂ） 多次元方程式では、ＮＳ型方程式の collapse や focussing あるいはＧＬ型方程式の defect や spiral 解などのように特異性が問題となる。

（ｃ） 多次元の局在構造が存在するとしても、それらの相互作用の記述は方向依存性が加わるため１次元系に比べはるかに難しくなる。

（ｄ） 多次元局在構造は、単一ではほぼソリトン的に振舞うが、相互作用において輻射を生じる例が多く、完全には保存的とならない [Iwasaki達(1990)][15]。

（ｅ） 摂動法として有力な逆散乱法は、多次元系への厳密解法の拡張がなければ使用できない。 厳密解法は、強い非線形、多次元、散逸系などに対し拡張が試みられているが、まだ充分とは言えない。

以上のように、多次元の場合は１次元の場合より一般に複雑となる。 しかし、空間対称性によりカオスが抑制されるという例も Olsen 達(1985)[16] により報告されているので、一般論は成立しないと考えられる。 従って、非線形問題の取り扱いにおいては、"数値実験によって現象の特徴をつかみ、理論的考察を加える"という、いわゆる "synergetics" のアプローチに頼らざるを得ないのではなかろうか。

参考文献

1) Y.H.Ichikawa,T.Mitsuhashi & K.Konno:
J.Phys.Soc.Japan, **41**(1976)1382; **43**(1977)675.
K.Konno,T.Mitsuhashi & Y.H.Ichikawa: J.Phys.Soc.Japan, **43**(1977)669.

2) Y.Kodama & T.Taniuti: J.Phys.Soc.Japan, **45**(1978)298; **47**(1979)1706.
Physica Scripta, **20**(1979)486.
Y.Kodama: J.Phys.Soc.Japan, **45**(1978)311.

3) Y.Kodama: Physica, **16D**(1985)14. Phys.Lett. **112A**(1985)193.
Proc.IUTAM Symp. Nonlinear Water Waves (eds.K.Horikawa & H.Maruo), Springer(1988)pp.85-91.

4) J.Fenton: J.Fluid Mech. **53**(1972)257.

5) V.I.Karpman: Physica Scripta, **20**(1979)462.
V.I.Karpman & E.M.Maslov: Sov.Phys.JETP, **48**(1978)252.
V.I.Karpman & V.V.Solov'ev: Physica, **3D**(1981)142.

D. J. Kaup & A. C. Newell: Proc. Roy. Soc. Lond. **A361**(1978) 413.

6) K. Nozaki & Bekki: Phys. Lett. **102A**(1984) 383.

J. Phys. Soc. Japan, **54**(1985) 2363.

N. Bekki & K. Nozaki: Proc. 7th KSI, Dynamical Problems in Soliton Systems (ed. S. Takeno), Springer(1985) pp. 268-271.

野崎一洋、戸次直明： 月刊フィジクス、６巻９号（１９８５）５３４。

K. Nozaki: Physica, **23D**(1986) 369.

7) A. R. Bishop: Proc. 7th KSI, Dynamical Problems in Soliton Systems (ed. S. Takeno), Springer(1985) pp. 250-257.

E. A. Overman II, D. W. McLaughlin & A. R. Bishop: Physica, **19D**(1986) 1.

A. R. Bishop, M. G. Forest, D. W. McLaughlin & E. A. Overman II: Physica, **23D**(1986) 293.

8) M. G. Forest & D. W. McLaughlin: J. Math. Phys. **23**(1982) 1248.

9) K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovsky, V. V. Papko & A. S. Pikovsky: Phys. Lett. **74A**(1979) 177.

D. Michelson: Physica, **19D**(1986) 89.

A. P. Hooper & R. Grimshaw: Wave Motion, **10**(1988) 405.

10) N. R. Pereira & L. Stenflo: Phys. Fluids, **20**(1977) 1733.

K. Nozaki & N. Bekki: J. Phys. Soc. Japan, **53**(1984) 1581.

11) K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovskii & V. V. Papko: Sov. Phys. JETP, **44**(1976) 306.

K. A. Gorshkov & V. V. Papko: Sov. Phys. JETP, **46**(1977) 92.

12) T. Kawahara & S. Toh: Phys. Fluids, **31**(1988) 2103.

T. Kawahara & M. Takaoka: J. Phys. Soc. Japan, **57**(1988) 3714.

Physica, **39D**(1989) 43.

13) M. M. Shen & D. R. Nicholson: Phys. Fluids, **30**(1987) 1096.

14) S. Toh: J. Phys. Soc. Japan, **56**(1987) 949.

15) H. Iwasaki, S. Toh & T. Kawahara: to appear in Physica D.

16) O. H. Olsen, P. S. Lomdahl, A. R. Bishop & J. C. Eilbeck: J. Phys. C, **18**(1985) L511.