量子カオスにおける位相回復

戸田幹人　京都大学　理学部

位相回復問題は逆問題の一種である。量子力学では、観測によって波動関数の絶対値は得られるが、位相に関する情報は失われる。このとき観測結果から位相について何もわからないかというと必ずしもそうではなく、適切な事前情報によって位相を復元することができる。ここでの問題意識は、位相回復の困難さ（具体的には、事前情報の設定のしやすさ、解の不定性やアルゴリズムの不安定性）が波動関数のどういう特徴と関係しているかを調べることである。特に、可積分か非可積分かの違いが、位相回復の特性にどう現われるかに興味がある。位相情報の喪失は散逸の起源であるから、位相回復の困難さが量子カオスと関係があることは、十分に予想されることである。さらに、現在のように観測技術やその情報処理が進んだ時代では、どのような位相情報が復元困難であり、それがどのような力学に由来するかを研究することは、単に理念的なことではなく、実際的にも十分意味のあることである。

ここではより限定した方法として、次のことを考える。波動関数に対して、その複雑さを何らかの形で定量化したコストの値を計算する。このとき、位相を回復したいオリジナルの波動関数が、このコスト関数の最小値を与えるならば、アニーリングなどの方法によって位相回復が可能であろう。具体的なコスト関数の形は後で与えるが、その形が最善であるとは考えてはいない。改善法は模索している際中である。

まず前提として、一般に波動関数 $\Psi(x)$ について次の事前情報があるとする。

(1) $x\in[a,b]$ でのみ $\Psi(x)\neq 0$

さらに、

(2) 観測結果として $|\tilde{\Psi}(p)|^2$ が得られた

とする（ただし、$\tilde{\Psi}(p)$ は $\Psi(x)$ のフーリエ変換である）。

このとき、次の２つの定理

(3) Paley-Wiener
$\Psi(x)$ のフーリエ変換 $\tilde{\Psi}(p)$ は、複素 p 空間に解析接続可能であり、$\tilde{\Psi}(p)$ は整関数である。

(4) Hadamard
整関数は、最高時の係数とゼロ点 $\{z_n\}$ から一意に決まる。

を用いて位相回復を行なう。

このとき、観測結果 $|\tilde{\Psi}(p)|^2$ から計算できるゼロ点 $\{z_n, 1/z_n^*\}$ が、$\tilde{\Psi}(p)$ か $\tilde{\Psi}(p)^*$ か（$*$ は複素共役）、どちらのものであるかを決定しなければならない。１次元では、一般には決定方法はなく、ゼロ点の個数を N とするとき、2^N 個の可能性が残る。２次元以上では Hadamard の定理が使えないが、ゼロ集合 $\{z_n\}$ が点の集まりではなく曲線などになるため、解析接続の一意性により、位相回復ができるとされる。しかし、有限個のデータの場合の一意性、解析接続のアルゴリズムの不安定性などの問題を考えると、２次元以上の時も問題が解けたとは言えない。

ここでは、事前情報として前に述べたものに加えて、波動関数の可積分性・非可積分性を表現しうる次の情報を仮定する。

(5) 波動関数が次のような形

$$\Psi(x)=\sum_k A_k(x)\, e^{iS_k(x)}$$

に書けるとする。

これは、波動関数が半古典近似で扱えること、すなわち (x,p) 空間上でラグランジアン多様体に乗っていることを意味する。この情報により、波動関数に制限が加えられることになり、位相回復ができるのではないかと考えられる。

具体的には、$|\tilde{\Psi}(p)|^2$ の多項式近似によりゼロ点を求め、対応する２つのゼロ点 z_n, $1/z_n^*$ のうち任意に１つを選んで位相回復を行なう。この時、ゼロ点のフリップ $z_n\rightarrow 1/z_n^*$ でどのように (x,p) 空間上の波動が変化するかを計算する。 Fig. 1 (a)に示すのは、ラグランジアン多様体が３次関数の場合に、オリギナルの波動関数に対して、ゼロ点のフリップがラグランジン多様体を歪める様子を示したものであり、 Fig.1(b)に＋で示したのがフリップしたゼロ点である（縦軸が

$\log z_n$の実部、横軸はその虚部）。ただしここでは波動関数の (x,p) 空間表示として、Q関数

$$Q(x,p) = |<x,p|\Psi>|^2$$

を用いている（ $|x,p>$ は (x,p) に局在した最小不確定性波束）。これは、ラグランジアン多様体を見るのに、 (x,p) 空間表示としてよく用いられるウィグナー関数などに比べてQ関数がもっとも適しているからである。

Fig.1

(a)

(b)

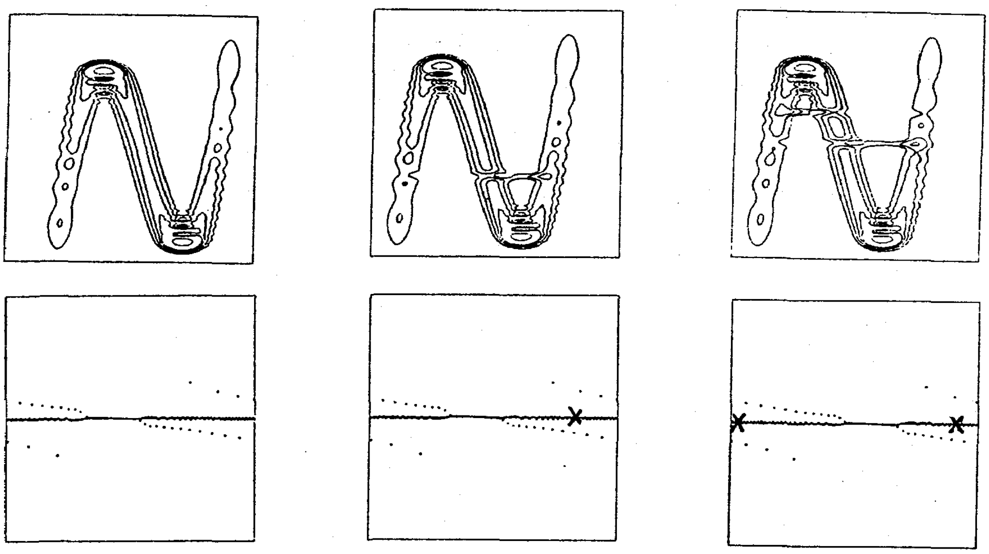


Fig. 1 より、次の作業仮説を考えることができる。すなわち、オリジナルの波動関数が滑らかなラグランジアン多様体を持っているとき、コスト関数として多様体の滑らかさを特徴ずけるものを選べば、オリジナルの波動関数は、それからゼロ点をフリップして得られる波動関数に比較して、コスト関数の最小値を与えるのではないか。

多様体の滑らかさを特徴ずける量は色々考えられるが、以下、コスト関数としてQ関数の2次の微分から計算する

$$Cost = \int\left\{\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}\right)^2\right\}dxdp$$

を用いる。

Fig.2

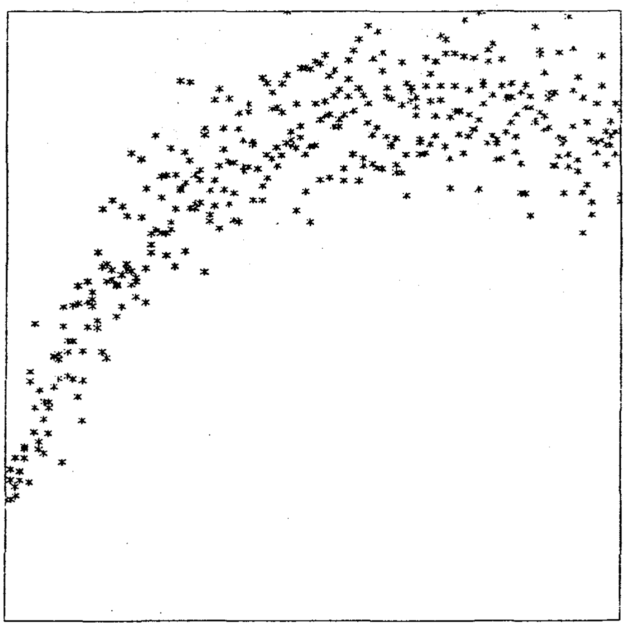


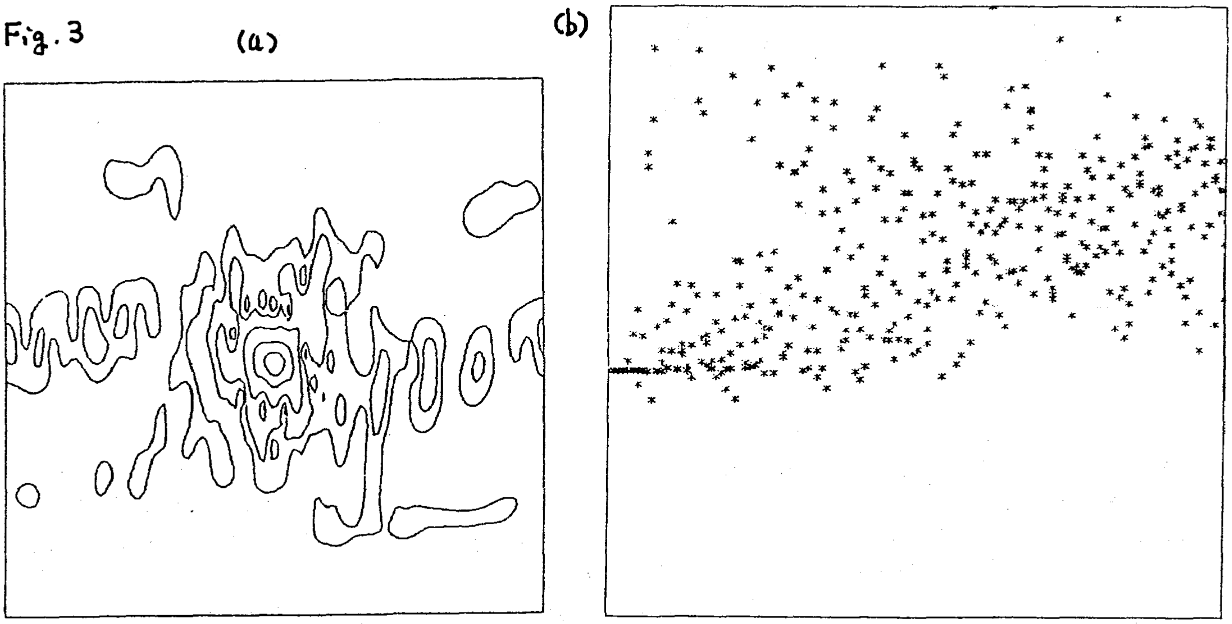
Fig. 2 に示すのは、縦軸にコスト関数の値、横軸にオリジナルの波動関数のゼロ点のうち何個をフリップしたかの個数（ゼロ点のハミング距離）をプロットしたものである。この図からわかるように、確かにオリジナルの波動関数がコスト関数の最小を与えている。さらに重要なのは、ゼロ点のハミング距離に対してコスト関数が、大まかな傾向として増加関数になっていることである。

このことから、次の可能性が出てくる。対応するゼロ点の対から任意に１つを選んで波動を作り、それを初期値として、上記のコスト関数を用いたアニーリングによってオリジナルの波動関数が得られるのではないか。

実際にアニーリングを試みた結果では、単純なアニーリングではコスト関数の極小値に滞在する時間が長く、アニーリングに工夫が必要である。

以上に述べた位相回復では、波動関数が (x,p) 空間でラググランジアン多様体で与えられていることが重要である。一般に可積分系の波動関数ではこのことが成り立つ。しかし、量子カオスでは事情が異なる。量子カオスではモース・スメール馬蹄形力学により不断に多様体の折り畳みが起こっている。このため波動関数の (x,p) 空間表示ではラグランジアン多様体の間で量子干渉が発生する。その場合にはここに述べた方法による位相回復は困難になる。このことを示したのがFig. 3 である。オリジナルの波動関数の (x,p) 空間表示をFig. 3 (a)に示す。これは、standard map の量子力学で得られたものである。このオリジナルの波動関数に対してコスト関数とハミング距離を示したのがFig. 3 (b)である。これからわかるように、オリジナルの波動関数がコスト関数の最小値を与えず、前述したようなアニーリングでは位相回復ができない。

Fig. 3



以上に述べた結果をまとめよう。可積分系と非可積分系の波動関数には、位相回復のしやすさに大きな違いがある可能性がある。その原因は、(x,p) 空間におけるラグランジアン多様体の間の量子干渉である。非可積分系の波動関数では、馬蹄形力学のよる多様体の折り畳みによって量子干渉が発生し、これが位相回復を困難にする。

ここで述べた結論が、具体的なアルゴリズムに依存することも考えられる。例えば２次元以上では、形式的には一意な位相回復を保証するアルゴリズムが提案されている。しかし、そのようなアルゴリズムは実際には不安定であることが多い。その場合、不安定生の原因がラグランジアン多様体の量子干渉である可能性もある。なぜなら多様体の量子干渉は位相の特異点(Q関数のゼロ点）を作り出すからである。その回りでは、波動関数の位相が激しく変化している。そのため、その付近の位相の詳しい情報が得にくくなっているであろう。もしこの推測が正しければ、これは量子カオスと散逸の関係についても、よりミクロな見方を提供するであろう。このような立場から、位相回復と散逸の起源の関係を調べていくのが今後の課題である。